

L8 拓展篇第 8 讲——一次函数（一）

参考答案与试题解析

1. 已知 y 关于 x 的一次函数 $y = mx + 2 - 2m$ ($m \neq 0$ 且 $m \neq 1$)，其图象交 x 轴于点 A ，交 y 轴于点 B 。（ O 为坐标系的原点）

（1）对于 $m \neq 0$ 的任意值，该函数图象必过一定点，请求出定点的坐标；

（2）是否存在 m 的值，使 $\triangle OAB$ 的面积为 8？若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由。

【答案】（1）(2,2)；

（2）存在， $m = -1$ 或 $3 + 2\sqrt{2}$ 或 $3 - 2\sqrt{2}$ 。

【分析】（1）(2,2)；

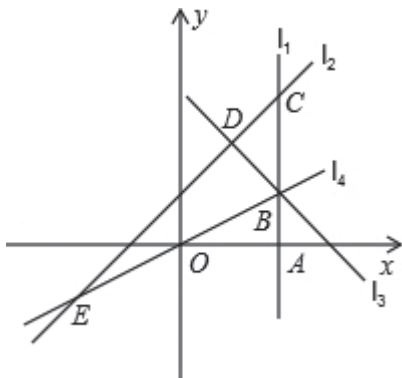
（2）存在，理由：

$$OA = \left| \frac{2m-2}{m} \right|, \quad OB = |2-2m|,$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \left| \frac{2m-2}{m} \right| \times |2-2m| = 8,$$

解得： $m = -1$ 或 $3 + 2\sqrt{2}$ 或 $3 - 2\sqrt{2}$ 。

2. 如图，直线 $l_1 \perp x$ 轴于点 $A(2,0)$ ，点 B 是直线 l_1 上的动点。直线 $l_2: y = x + 1$ 交 l_1 于点 C ，过点 B 作直线 l_3 垂直于 l_2 ，垂足为 D ，过点 O, B 的直线 l_4 交 l_2 于点 E ，当直线 l_1, l_2, l_3 能围成三角形时，设该三角形面积为 S_1 ，当直线 l_2, l_3, l_4 能围成三角形时，设该三角形面积为 S_2 。若点 B 在线段 AC 上，且 $S_1 = S_2$ ，则 B 点坐标为_____；



【答案】 (2,0)。

【分析】解：设 B 的坐标是 $(2, m)$

当 $m > 2$ 时， E 点位于直线 l_1 右侧，此时 $S_1 < S_2$ 无法满足 $S_1 = S_2$ ，不做讨论。

当 $m < 2$ 时， E 点位于直线 l_1 左侧。

$\because$ 直线 $l_2: y = x + 1$ 交 l_1 于点 C ，

$\therefore \angle ACE = 45^\circ$ ， $\therefore \triangle BCD$ 是等腰直角三角形。

$$BC = |3 - m|, \text{ 则 } BD = CD = \frac{\sqrt{2}}{2} |3 - m|,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} |3 - m| \right)^2 = \frac{1}{4} (3 - m)^2.$$

设直线 l_4 的解析式是 $y = kx$ ，过点 B ，代入解得： $k = \frac{m}{2}$ ，

则直线 l_4 的解析式是 $y = \frac{m}{2}x$ 。

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} y = \frac{m}{2}x \\ y = x + 1 \end{cases}, \text{ 解得：} \begin{cases} x = \frac{2}{m-2} \\ y = \frac{m}{m-2} \end{cases},$$

则 E 的坐标是 $(\frac{2}{m-2}, \frac{m}{m-2})$ 。

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot \left| \frac{2}{m-2} - 2 \right| = \frac{(3-m)^2}{|m-2|}.$$

$$\therefore S_2 = S_{\triangle BCE} - S_1 = \frac{(3-m)^2}{|m-2|} - \frac{1}{4} (3-m)^2.$$

$$\text{当 } S_1 = S_2 \text{ 时, } \frac{(3-m)^2}{|m-2|} - \frac{1}{4} (3-m)^2 = \frac{1}{4} (3-m)^2.$$

解得： $m_1 = 3, m_2 = 4$ 或 $m_3 = 0$ ，

易得点 C 坐标为 $(2, 3)$ ，即 $AC = 3$ ，

$m_1 = 3$ 时， B 点与 C 点重合，直线 l_1, l_2, l_3 不能围成三角形，直线 l_2, l_3, l_4 同样不能围成三角形，舍去。

$\because$ 点 B 在线段 AC 上， $\therefore m_2 = 4$ 不合题意舍去，

则 B 的坐标是 $(2, 0)$ 。

3. 对于实数 a, b ，定义符号 $\min\{a, b\}$ ，其意义为：当 $a \geq b$ 时， $\min\{a, b\} = b$ ；当 $a < b$ 时， $\min\{a, b\} = a$ 。例如： $\min\{2, -1\} = -1$ ，若关于 x 的函数 $y = \min\{2x - 1, -x + 3\} = b$ ，则该函数的最大值为多少。

【答案】 $\frac{5}{3}$.

【分析】画出函数图象，结合图象可知当 $x = \frac{4}{3}$ 时，取到最大值，最大值为 $\frac{5}{3}$.

4. 设 x 、 y 满足 $x + 3y + |3x - y| = 19$ ， $2x + y = 6$ ，求 x 、 y .

【答案】 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = 5$.

【分析】把 $y = 6 - 2x$ 代入 $x + 3y + |3x - y| = 19$ ，可得： $|5x - 6| = 5x + 1$ ，

又 $5x - 6 < 5x + 1$ ，故 $-(5x - 6) = 5x + 1$ ，解得 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = 5$.

5. 已知 $|a| = a + 2$ ， $|x| = ax$ ，求 $|x - 1| - |x + 1| + 2$ 的最大值和最小值.

【答案】最大值为4，最小值为2.

【分析】由 $|a| = a + 2$ ，解得 $a = -1$ ，代入 $|x| = ax$ ，得 $x \leq 0$. 则 $|x - 1| - |x + 1| + 2 = 3 - x - |x + 1|$. 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时，最大值为4，最小值为2；当 $x < -1$ 时，原式=4.

6. 在直角坐标系中， O 为原点，矩形 $OABC$ 的顶点坐标分别为 $A(15,0)$ 、 $B(15,6)$ 、 $C(0,6)$ ，直线 $y = \frac{1}{3}x + b$ 恰好将矩形 $OABC$ 分成面积相等的两部分，求 b 的值.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【分析】由于 $OABC$ 是中心对称图形，则直线必过它的对称中心 $(\frac{15}{2}, 3)$ ，继而求解.