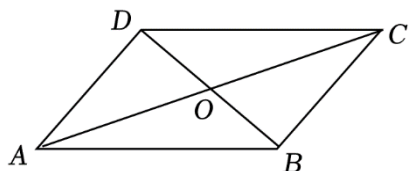


习题 L8-33：平行四边形的判定

参考答案与试题解析

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ，下列条件不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是()



- A. $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ B. $AB = CD$ ， $AD = CB$
C. $AB \parallel CD$ ， $AD = CB$ D. $OA = OC$ ， $OB = OD$

【答案】C

2. 能判定一个四边形是平行四边形的条件是()

- A. 一组对边平行，另一组对边相等
B. 一组对边平行，一组对角相等
C. 一组对边平行，一组邻角互补
D. 一组对边相等，一组对角互补

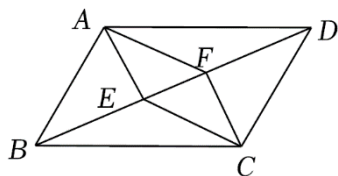
【答案】B

3. 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 是对角线 BD 上的两点．若四边形 $AECF$ 为平行四边形，则以下三种方案中正确的方案是()

甲：只需要满足 $BF = DE$ ；

乙：只需要满足 $AE = CF$ ；

丙：只需要满足 $AE \parallel CF$ ．

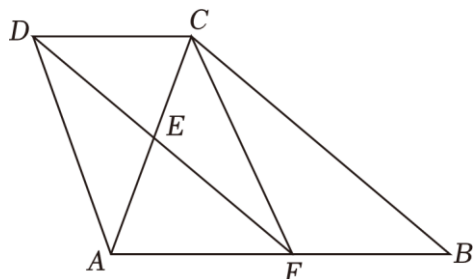


- A. 甲、乙 B. 甲、丙 C. 乙、丙 D. 甲、乙、丙

【答案】B

4. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， F 为 AB 上一点， DF 与 AC 交于点 E ， $AE = CE$ ．

- (1) 求证：四边形 $AFCD$ 是平行四边形；
 (2) 若 $BC=8$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ， $\angle DCB=135^\circ$ ，求 AC 的长.

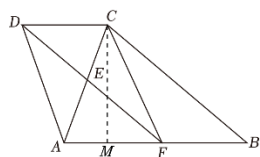


【答案】(1) 证明见分析；

(2) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

【分析】(1) 证 $\triangle AEF \cong \triangle CED(ASA)$ ，得 $AF=CD$ ，再由平行四边形的判定即可得出结论；

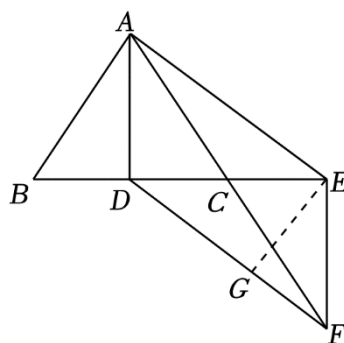
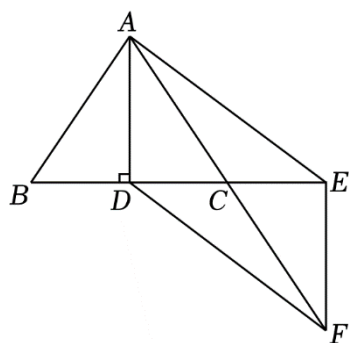
(2)



过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，证 $\triangle BCM$ 是等腰直角三角形，得 $CM = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 4\sqrt{2}$ ，再由含 30° 角的直角三角形的性质得 $AC=2AM$ ，然后由勾股定理得 $CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{3}AM = 4\sqrt{2}$ ，求出 $AM = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，即可得出 $AC = \frac{8\sqrt{6}}{3}$.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，延长 DC 到点 E ，使 $CE=CD$ 。过点 E 作 $EF \parallel AD$ 交 AC 的延长线于点 F ，连接 AE ， DF 。

- (1) 求证：四边形 $ADFE$ 是平行四边形；
 (2) 过点 E 作 $EG \perp DF$ 于点 G ，若 $BD=2$ ， $AE=5$ ，求 EG 的长.



【答案】(1) 证明见分析；

(2) $\frac{12}{5}$.

【分析】(1) 证 $\triangle FCE \cong \triangle ACD(ASA)$ ，得 $EF = AD$ ，再由平行四边形的判定即可得出结论；

(2) 由平行四边形的性质得 $DF = AE = 5$ ，再由等腰三角形的性质得 $CD = BD = 2$ ，则 $DE = 2CD = 4$ ，进而由勾股定理得 $EF = 3$ ，由直角三角形 DEF 面积出发，求出 EG 的长.

6. 阅读下面的材料：定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

已知：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别是边 AB ， AC 的中点.

求证： $DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

证明：延长 DE 到点 F ，使 $EF = DE$ ，连接 CF ，...

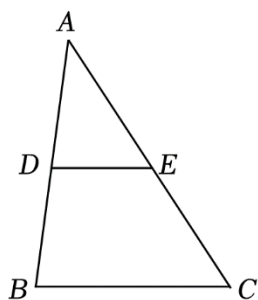


图1

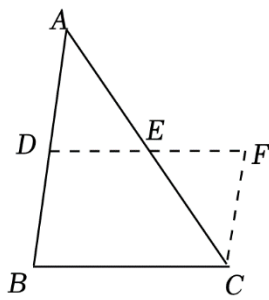


图2

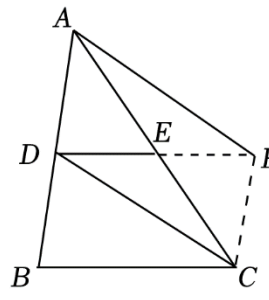


图3

甲、乙两人后续证明的部分思路如下：

甲：如图 2，先证明 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ ，再推理得出四边形 $DBCF$ 是平行四边形.

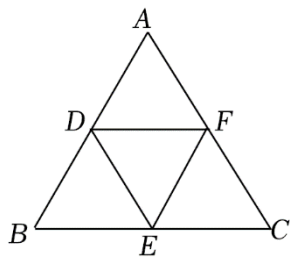
乙：如图 3，连接 DC ， AF ．先后证明四边形 $ADCF$ ， $DBCF$ 分别是平行四边形.

下列判断正确的是()

- | | |
|----------------|----------------|
| A. 甲思路正确，乙思路错误 | B. 甲思路错误，乙思路正确 |
| C. 甲、乙两人思路都正确 | D. 甲、乙两人思路都错误 |

【答案】C

7. 如图，面积为 4 的等边三角形 ABC 中，点 D 、 E 、 F 分别是 AB 、 BC 、 CA 的中点，则 $\triangle DEF$ 的面积是()



A. 1

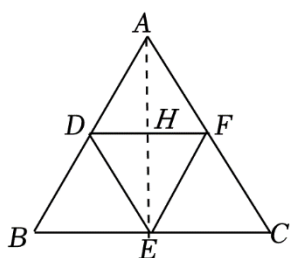
B. 2

C. 3

D. 4

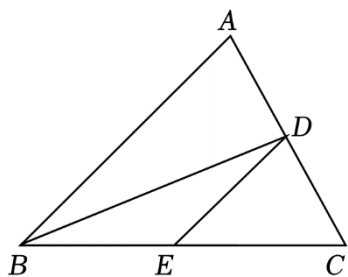
【答案】 A

【分析】



连接 AE ，交 DF 于点 H ，根据等边三角形的性质得到 $AB=AC$ ，根据等腰三角形的性质得到 $AE \perp BC$ ，根据三角形中位线定理得到 $DF = \frac{1}{2}BC$ ， $DF \parallel BC$ ，根据三角形的面积公式计算，得到答案．

8. 如图， BD 是等腰 $\triangle ABC$ 底边 AC 边上的中线， $ED \parallel AB$ ， $\angle C = 65^\circ$ ，则 $\angle BDE$ 度数是()



A. 24°

B. 25°

C. 30°

D. 35°

【答案】 B

【分析】 $\because BA=BC$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 底边 AC 边上的中线，

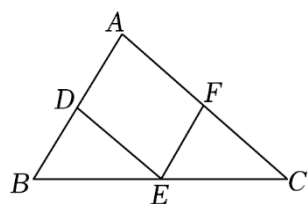
$\therefore \angle A = \angle C = 65^\circ$ ， $BD \perp AC$ ，

$\therefore \angle ABD = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ ，

$\because ED \parallel AB$ ，

$\therefore \angle BDE = \angle ABD = 25^\circ$ ，

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 、 F 分别是 AB 、 BC 、 CA 的中点, 连接 DE 、 EF , 若 $\angle B=70^\circ$, $\angle C=42^\circ$, 则 $\angle DEF$ 的度数为()



- A. 75° B. 80° C. 78° D. 68°

【答案】 D

【分析】 $\because$ 点 D 、 E 、 F 分别是 AB 、 BC 、 CA 的中点,

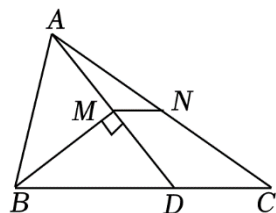
$\therefore DE$ 、 EF 都是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel AC$, $EF \parallel AB$,

$\therefore \angle FEC = \angle B = 70^\circ$, $\angle DEB = \angle C = 42^\circ$,

$\therefore \angle DEF = 180^\circ - \angle FEC - \angle DEB = 180^\circ - 70^\circ - 42^\circ = 68^\circ$.

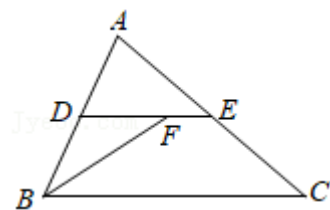
10. 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 上, $BD=AB$, $BM \perp AD$ 于点 M , N 是 AC 的中点, 连接 MN , $AB=6$, $BC=8$, 则 MN 的长为()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 A

11. 如图, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $\angle ABC$ 的角平分线交 DE 于点 F , $AB=8$, $BC=12$, 则 EF 的长为()



- A. 1 B. 1.5 C. 2 D. 2.5

【答案】 C

【分析】

$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $AB=8$, $BC=12$,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = 4, \quad DE \parallel BC, \quad DE = \frac{1}{2}BC = 6,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle CBF,$$

$\because BF$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

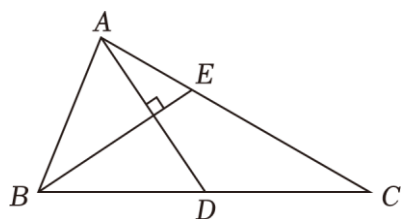
$$\therefore \angle DBF = \angle CBF,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle DBF,$$

$$\therefore DF = BD = 4,$$

$$\therefore EF = DE - DF = 6 - 4 = 2,$$

12. 如图, AD 、 BE 分别是 $\triangle ABC$ 的中线和角平分线, $AD \perp BE$, $AD = BE = 6$, 则 AC 的长为()



A. $3\sqrt{5}$

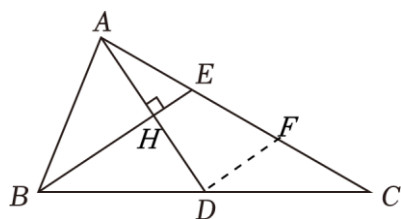
B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

C. $9\sqrt{5}$

D. $\frac{9\sqrt{5}}{2}$

【答案】 D

【分析】



如图, 取 CE 的中点 F , 连接 DF ,

$$\because BD = DC, \quad EF = FC,$$

$\therefore DF$ 是 $\triangle BCE$ 的中位线,

$$\therefore DF = \frac{1}{2}BE = 3, \quad DF \parallel BE,$$

$$\because AD \perp BE,$$

$$\therefore AD \perp DF,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5},$$

$\because BE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $AD \perp BE$,

$$\therefore AH = HD,$$

$$\because DF \parallel HE,$$

$$\therefore AE = EF = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore AC = \frac{9\sqrt{5}}{2},$$

故选: D .

习题 L8-34：矩形的性质与判定

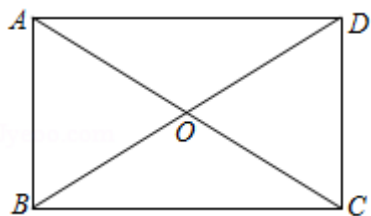
参考答案与试题解析

1. 矩形具有而一般平行四边形不具有的性质是()

- A. 对角线相等
- B. 对边相等
- C. 对角相等
- D. 对角线互相平分

【答案】 A

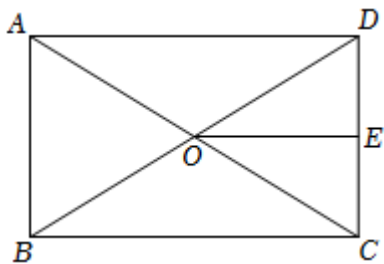
2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 交于点 O ，若 $AC=14$ ，则 OB 的长为()



- A. 7
- B. 6
- C. 5
- D. 2

【答案】 A

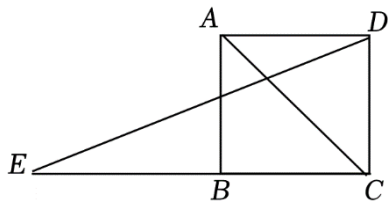
3. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，点 E 是 CD 的中点，若 $OE=3$ ，则 BC 的长为()



- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

【答案】 D

4. 如图，延长矩形 $ABCD$ 的边 CB 至点 E ，使 $EB=AC$ ，连接 DE ，若 $\angle BAC=\alpha$ ，则 $\angle E$ 的度数是()



A. $\frac{\alpha}{2}$

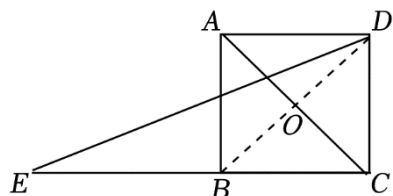
B. $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$

C. $\alpha - 45^\circ$

D. $30^\circ + \frac{\alpha}{2}$

【答案】 B

【分析】



连接 BD 交 AC 于点 O ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad OA = OC = \frac{1}{2}AC, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD, \quad AC = BD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle OBA = \angle BAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle CBD = 90^\circ - \alpha,$$

$$\because BE = AC = BD,$$

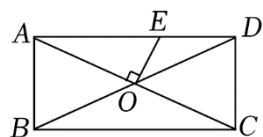
$$\therefore \angle BDE = \angle E,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle BDE + \angle E = 2\angle E,$$

$$\therefore 2\angle E = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle E = 45^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

5. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 过点 O 作 $OE \perp AC$ 交 AD 于 E , 若 $AB=4$, $BC=8$, 则 AE 的长为()



A. 3

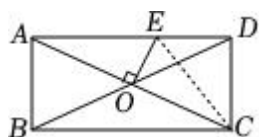
B. 4

C. 5

D. $2\sqrt{10}$

【答案】 C

【分析】 如图, 连接 CE ,



在矩形 $ABCD$ 中,

$$\because AB=4, \quad BC=8,$$

$$\therefore AD=BC=8, \quad CD=AB=4, \quad OA=OC,$$

$$\because OE \perp AC,$$

$$\therefore OE \text{ 垂直平分 } AC,$$

$$\therefore AE=CE,$$

$$\text{设 } AE=CE=x, \text{ 则 } DE=8-x,$$

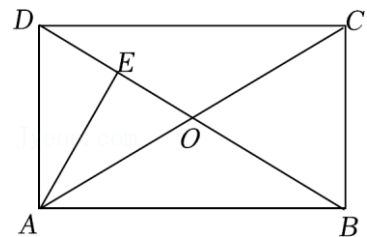
$$\text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } CD^2 + DE^2 = CE^2,$$

$$\text{即 } 4^2 + (8-x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x=5,$$

即 AE 的长为 5.

6. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $AE \perp BD$ 交 BD 于点 E , $\angle AOB=110^\circ$, 则 $\angle DAE$ 的度数为()



A. 40°

B. 35°

C. 30°

D. 25°

【答案】 B

【分析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle BAD=90^\circ, \quad OA=OD,$$

$$\therefore \angle OAD=\angle ADO, \quad \angle ADO+\angle ABD=90^\circ,$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle BAE+\angle ABD=90^\circ,$$

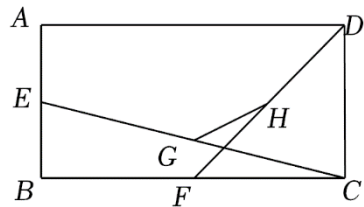
$$\therefore \angle BAE=\angle ADO=\angle OAD,$$

$$\because \angle AOB=\angle OAD+\angle ADO,$$

$$\therefore \angle BAE=\angle OAD=\angle ADO=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 110^\circ=55^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE=\angle BAD-\angle BAE=90^\circ-55^\circ=35^\circ.$$

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E ， F 分别是边 AB ， BC 的中点，连接 EC ， FD ，点 G ， H 分别是 EC ， FD 的中点，连接 GH ，若 $AB=6$ ， $BC=10$ ，则 GH 的长度为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

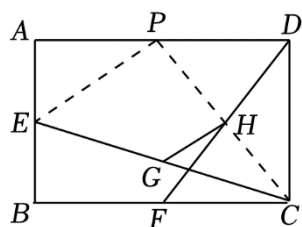
B. $\frac{\sqrt{29}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{34}}{2}$

D. 2

【答案】 C

【分析】



连接 CH 并延长交 AD 于 P ，连接 PE ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\because E$ ， F 分别是边 AB ， BC 的中点， $AB=6$ ， $BC=10$ ，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ ， $CF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\angle PDH = \angle HFC$ ，

在 $\triangle PDH$ 与 $\triangle CFH$ 中，

$$\begin{cases} \angle PDH = \angle HFC \\ DH = FH \\ \angle PHD = \angle CHF \end{cases}$$

$\therefore \triangle PDH \cong \triangle CFH$ ，

$\therefore PD = CF = 5$ ， $CH = PH$ ，

$\therefore AP = AD - PD = 5$ ，

$\therefore PE = \sqrt{AP^2 + AE^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ ，

$\because$ 点 G 是 EC 的中点，

$$\therefore GH = \frac{1}{2}EP = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

8. 在四边形 $ABCD$ 中, AC 、 BD 交于点 O , 在下列条件中, 不能判定四边形 $ABCD$ 为矩形的是()

- A. $AO=CO$, $BO=DO$, $\angle BAD=90^\circ$
- B. $AB=CD$, $AD=BC$, $AC=BD$
- C. $\angle BAD=\angle BCD$, $\angle ABC+\angle BCD=180^\circ$, $AC \perp BD$
- D. $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$, $AC=BD$

【答案】 C

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, O 是 AC 的中点, 求证: $BO=\frac{1}{2}AC$.

证明: 如图, 延长 BO 至点 D , 使 $OD=BO$, 连接 AD , CD .

...

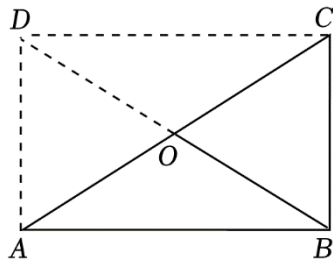
$$\therefore AC=BD=2OB,$$

$$\therefore BO=\frac{1}{2}AC.$$

下面是“.....”部分被打乱顺序的证明过程:

- ① $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;
- ② $\because \angle ABC=90^\circ$;
- ③ $\because OA=OC$, $OB=OD$;
- ④ $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

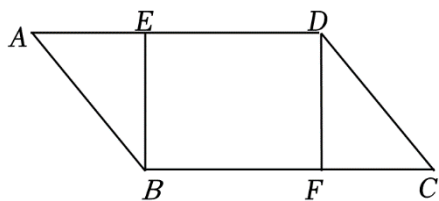
则正确的顺序为()



- A. ③①②④
- B. ③②①④
- C. ②③①④
- D. ②①③④

【答案】 A

10. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F , 点 E 在边 AD 上, $AE=CF$, 连接 BE . 求证: 四边形 $BFDE$ 是矩形.



【解答】证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，

∵ $ED = AD - AE$ ， $BF = BC - CF$ ， $AE = CF$ ，

∴ $ED = BF$ ，

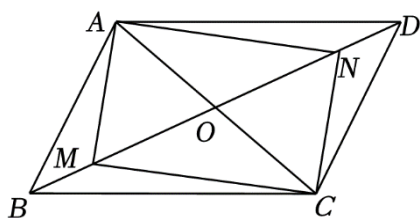
∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形，

又∵ $DF \perp BC$ ，

∴ $\angle DFB = 90^\circ$ ，

∴ 平行四边形 $BFDE$ 是矩形。

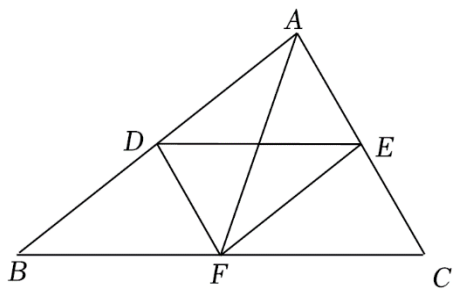
11. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， M 、 N 是 BD 上两点， $BM = DN$ ，连接 AM 、 MC 、 CN 、 NA ，添加一个条件，使四边形 $AMCN$ 是矩形，这个条件是()



- A. $MB = MO$ B. $OM = \frac{1}{2}AC$ C. $BD \perp AC$ D. $\angle AMB = \angle CND$

【答案】B

12. 如图，线段 DE 与 AF 分别为 $\triangle ABC$ 的中位线与中线。在下列条件中，能够判定四边形 $ADFE$ 为矩形的是()



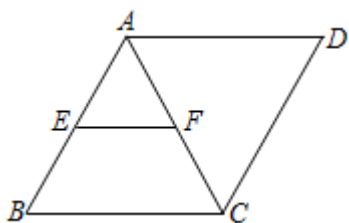
- A. $AB = AC$ B. $AF \perp BC$ C. $\angle BAF = \angle CAF$ D. $BC = 2AF$

【答案】D

习题 L8-35：菱形的性质与判定

参考答案与试题解析

1. 如图，菱形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点，若 $EF=3$ ，则菱形 $ABCD$ 的周长为()



- A. 24 B. 18 C. 12 D. 9

【答案】 A

【分析】 $\because E$ 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点，

$$\therefore BC = 2EF = 6,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 6,$$

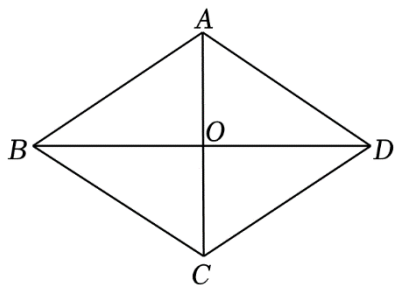
$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的周长} = 4 \times 6 = 24,$$

2. 已知菱形的边长为 13cm ，它的一条对角线长为 10cm ，则该菱形的面积为()

- A. 60cm^2 B. 120cm^2 C. 240cm^2 D. 480cm^2

【答案】 B

【分析】



在菱形 $ABCD$ 中， $AB=13\text{cm}$ ， $AC=10\text{cm}$ ，

$\therefore$ 对角线互相垂直平分，

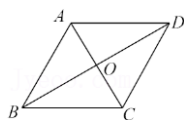
$$\therefore \angle AOB = 90^\circ, \quad OA = 5\text{cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $OB = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 (cm^2),$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = 4S_{\triangle AOB} = 4 \times 30 = 120 (cm^2).$$

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 交于点 O ， $AO=3$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ，则菱形 $ABCD$ 的周长是()



A. 36

B. 24

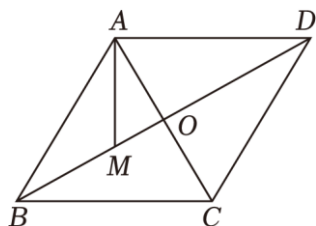
C. 12

D. 6

【答案】 B

【分析】由菱形的性质得 $AC=2AO=6$ ， $AB=BC=CD=AD$ ，易证 $\triangle ABC$ 是等边三角形，得 $AB=BC=AC=6$ ，即可求解.

4. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， AM 平分 $\angle BAC$ ，若 $AM=2$ ，则菱形 $ABCD$ 的面积为()



A. 6

B. 8

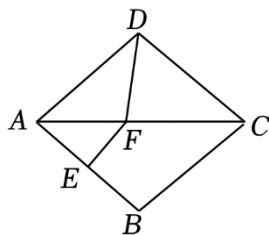
C. $6\sqrt{3}$

D. $8\sqrt{3}$

【答案】 C

【分析】由菱形的性质得 $AB=CB$ ， $AC \perp BD$ ，而 $\angle ABC=60^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $\angle BAC=60^\circ$ ， $\angle CAM=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$ ，则 $OM=\frac{1}{2}AM=1$ ，由勾股定理得 $OA=\sqrt{AM^2-OM^2}=\sqrt{3}$ ，则 $OB=3$ ，所以 $AC=2OA=2\sqrt{3}$ ， $BD=2OB=6$ ，即可求得 $S_{\text{菱形}ABCD}=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6=6\sqrt{3}$.

5. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=94^\circ$ ， AB 的垂直平分线交对角线 AC 于点 F ， E 为垂足，连接 DF ，则 $\angle CFD$ 的度数是()



A. 80°

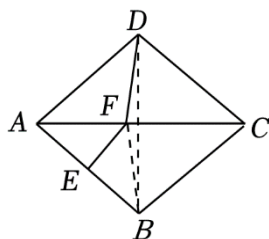
B. 82°

C. 86°

D. 88°

【答案】 C

【分析】 如图，连接 BD 、 BF ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle ABC = 94^\circ$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ， AC 垂直平分 BD ， $\angle FAD = \frac{1}{2} \angle BAD$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ ， $BF = DF$ ，

$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$ ，

$\therefore \angle FAD = 43^\circ$ ，

又 $\because EF$ 垂直平分 AB ，

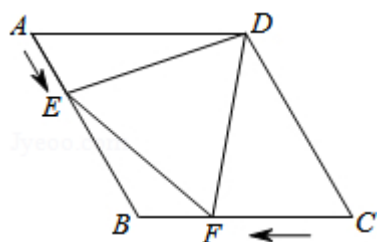
$\therefore AF = BF$ ，

$\therefore AF = DF$ ，

$\therefore \angle FAD = \angle FDA = 43^\circ$ ，

$\therefore \angle CFD = \angle FAD + \angle FDA = 43^\circ + 43^\circ = 86^\circ$ ，

6. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 5\text{cm}$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ， 点 E 、 F 同时由 A 、 C 两点出发，分别沿 AB 、 CB 方向向点 B 匀速移动（到点 B 为止），点 E 的速度为 1cm/s ，点 F 的速度为 2cm/s ，经过 t 秒 $\triangle DEF$ 为等边三角形，则 t 的值为()



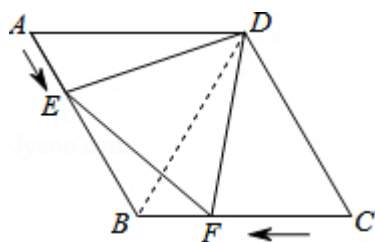
A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{3}$

【分析】



连接 BD ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = AD, \quad \angle ADB = \frac{1}{2} \angle ADC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

$$\therefore AD = BD,$$

又 $\because \triangle DEF$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle EDF = \angle DEF = 60^\circ,$$

又 $\because \angle ADB = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle BDF,$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 和 } \triangle BDF \text{ 中, } \begin{cases} \angle ADE = \angle BDF \\ AD = BD \\ \angle A = \angle DBF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BDF (ASA),$$

$$\therefore AE = BF,$$

$$\because AE = t, \quad CF = 2t,$$

$$\therefore BF = BC - CF = 5 - 2t,$$

$$\therefore t = 5 - 2t$$

$$\therefore t = \frac{5}{3}.$$

7. 在四边形 $ABCD$ 中， $AD = BC$ ， $AB = CD$ ．下列说法能使四边形 $ABCD$ 为菱形的是()

A. $AC = BD$

B. $AD = BC$

C. $\angle A = \angle B$

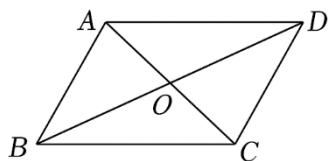
D. $AC \perp BD$

【答案】 D

【分析】先证四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再由菱形的判定对各个选项进行判断即可.

8. 如图，下列条件之一能使 $\square ABCD$ 是菱形的为()

- ① $AC = BD$;
- ② AC 平分 $\angle BAD$;
- ③ $AB = BC$;
- ④ $AC \perp BD$;



- A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

【答案】D

【分析】①平行四边形 $ABCD$ 是矩形;

② $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$,

$\because AC$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$,

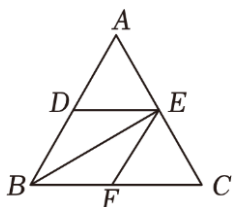
$\therefore \angle ACB = \angle BAC$,

$\therefore AB = CB$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形;

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ ， $DE \parallel BC$ ， $\angle EFC = 2\angle ABE$.

求证：四边形 $DBFE$ 是菱形.



【解答】证明： $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$,

$\therefore \angle EFC = 2\angle ABE = \angle ABC$,

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形,

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DEB,$$

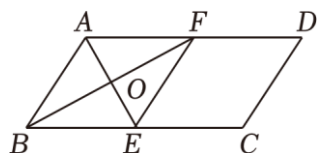
$$\therefore DE = DB,$$

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是菱形.

10. 如图, 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , 点 F 在 AD 上, $AF = AB$, 连接 BF 交 AE 于点 O , 连接 EF .

(1) 求证: 四边形 $ABEF$ 是菱形;

(2) 若 $BF = 8$, $AB = 5$, 求 AE 的长.



【解答】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle DAE,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle BAE,$$

$$\therefore EB = AB,$$

$$\because AF = AB,$$

$$\therefore EB = AF,$$

$$\text{又} \because EB \parallel AF,$$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形,

$$\because EB = AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形.

(2) 解: $\because$ 四边形 $ABEF$ 是菱形, $BF = 8$, $AB = 5$,

$$\therefore AE \perp BF, \quad OB = OF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \times 8 = 4, \quad OA = OE,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ ,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 ,$$

$$\therefore AE = 2OA = 2 \times 3 = 6 .$$

习题 L8-36：正方形的性质与判定

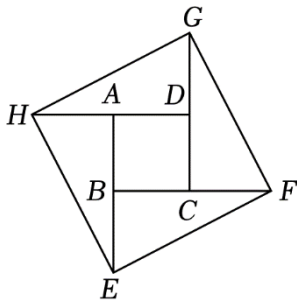
参考答案与试题解析

1. 下列说法正确的是()

- A. 四边相等的四边形是正四边形
- B. 边数最少的正多边形是正方形
- C. 由正方形的顶点共可确定 4 条直线
- D. 正方形的四个角的和是一个周角

【答案】 D

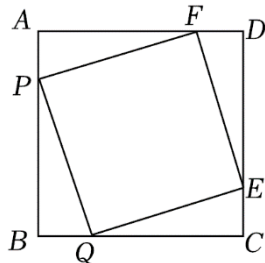
2. 如图，将正方形 $ABCD$ 的各边 AB ， BC ， CD ， DA 顺次延长至 E ， F ， G ， H ，且使 $BE = CF = DG = AH$ ，则四边形 $EFGH$ 是().



- A. 平行四边形
- B. 菱形
- C. 矩形
- D. 正方形

【答案】 D

3. 如图，点 E ， F ， P ， Q 分别是正方形 $ABCD$ 的四条边上的点，并且 $AF = BP = CQ = DE$ ，则下列结论不一定正确的是()



- A. $\angle AFP = \angle BPQ$
- B. $EF \parallel QP$
- C. 四边形 $EFPQ$ 是正方形

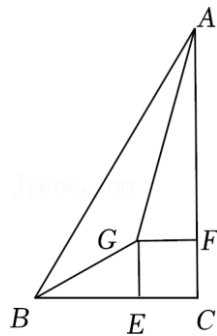
D. 四边形 $PQEF$ 的面积是四边形 $ABCD$ 面积的一半

【答案】 D

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle BAC$ ， $\angle ABC$ 的角平分线交于点 G ， $GE \perp BC$ 于点 E ， $GF \perp AC$ 于点 F 。

(1) 求证：四边形 $GECF$ 是正方形；

(2) 若 $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，求四边形 $GECF$ 的面积。



【解答】(1) 证明：过 G 作 $GD \perp AB$ 于 D ，

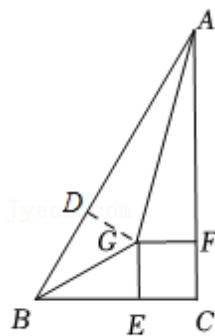


图1

$\because \angle CAB$ 、 $\angle CBA$ 的角平分线交于 G 点， $GE \perp BC$ 于点 E ， $GF \perp AC$ 于点 F ，

$\therefore DG = EG$ ， $DG = FG$ ，

$\therefore EG = FG$ ，

$\because \triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ， $GE \perp BC$ ， $GF \perp AC$ ，

$\therefore \angle C = \angle CEG = \angle CFG = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $GECF$ 是矩形，

$\because EG = FG$ ，

$\therefore$ 四边形 $GECF$ 为正方形；

(2)

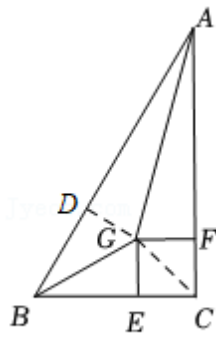


图2

解：如图 2，连接 CG ，过 G 作 $GD \perp AB$ 于 D ，

由勾股定理得： $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

设 $EG = x$ ，则 $DG = FG = x$ ，

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AGB} + S_{\triangle AGC} + S_{\triangle BCG},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \cdot 5x + \frac{1}{2} \cdot 4x + \frac{1}{2} \cdot 3x,$$

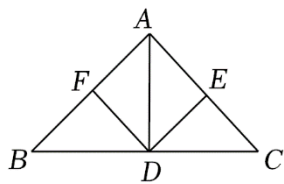
$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore S_{GECF} = EG^2 = 1.$$

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D ， $DE \parallel AB$ ， $DF \parallel AC$

(1) 求证：四边形 $AFDE$ 为正方形；

(2) 若 $AD = 32$ ，求四边形 $AFDE$ 的面积.



【解答】(1) 证明： $\because DE \parallel AB$ ， $DF \parallel AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFDE$ 是平行四边形.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle FAD = \angle EAD.$$

$\because DE \parallel AB$ ，

$$\therefore \angle EDA = \angle FAD.$$

$$\therefore \angle EDA = \angle EAD.$$

$$\therefore AE = DE.$$

∴ 四边形 $AFDE$ 是菱形.

∵ $\angle BAC = 90^\circ$,

∴ 四边形 $AFDE$ 是正方形.

(2) 解: ∵ 四边形 $AFDE$ 是正方形, $AD = 32$,

$$\therefore AF = DF = DE = AE = \frac{32}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}.$$

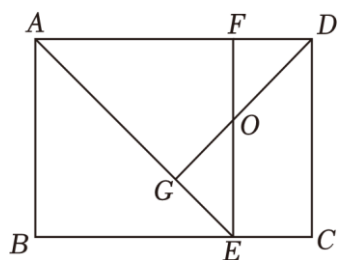
∴ 四边形 $AFDE$ 的面积为 $16\sqrt{2} \times 16\sqrt{2} = 512$.

6. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E , $EF \perp AD$ 于点 F , $DG \perp AE$ 于点 G , DG 与 EF 交于点 O .

(1) 求证: 四边形 $ABEF$ 是正方形;

(2) 若 $AD = AE$, 求证: $AB = AG$;

(3) 在 (2) 的条件下, 已知 $AB = 1$, 求 OF 的长.



【解答】(1) 证明: ∵ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore \angle BAF = \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\because EF \perp AD,$$

∴ 四边形 $ABEF$ 是矩形,

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore EF = EB,$$

∴ 四边形 $ABEF$ 是正方形;

(2) 证明: ∵ AE 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle DAG = \angle BAE,$$

在 $\triangle AGD$ 和 $\triangle ABE$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAG = \angle BAE \\ \angle AGD = \angle ABE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AGD \cong \triangle ABE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = AG;$$

(3) 解：四边形 $ABEF$ 是正方形；

$$\therefore AB = AF = 1,$$

$$\therefore \triangle AGD \cong \triangle ABE,$$

$$\therefore DG = AB = AF = AG = 1,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}, \quad \angle DAG = \angle ADG = 45^\circ,$$

$$\therefore DF = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore EF \perp AD,$$

$$\therefore \angle FDO = \angle FOD = 45^\circ,$$

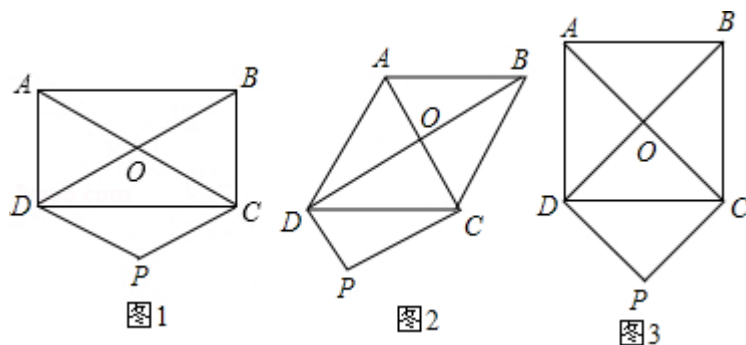
$$\therefore DF = OF = \sqrt{2} - 1.$$

$$\therefore OF = \sqrt{2} - 1.$$

7. (1) 如图矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O ，过点 D 作 $DP \parallel OC$ ，且 $DP = OC$ ，连接 CP ，判断四边形 $CODP$ 的形状并说明理由。

(2) 如果题目中的矩形变为菱形，结论应变为什么？说明理由。

(3) 如果题目中的矩形变为正方形，结论又应变为什么？说明理由。



【解答】 (1) 四边形 $CODP$ 的形状是菱形，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AC = BD, \quad OA = OC = \frac{1}{2} AC, \quad OB = OD = \frac{1}{2} BD,$$

$$\therefore OC = OD,$$

$$\therefore DP \parallel OC, \quad DP = OC,$$

∴ 四边形 $CODP$ 是平行四边形,

∵ $OC = OD$,

∴ 平行四边形 $CODP$ 是菱形;

(2) 四边形 $CODP$ 的形状是矩形,

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $AC \perp BD$,

∴ $\angle DOC = 90^\circ$,

∵ $DP \parallel OC$, $DP = OC$,

∴ 四边形 $CODP$ 是平行四边形,

∵ $\angle DOC = 90^\circ$,

∴ 平行四边形 $CODP$ 是矩形;

(3) 四边形 $CODP$ 的形状是正方形,

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AC \perp BD$, $AC = BD$, $OA = OC = \frac{1}{2}AC$, $OB = OD = \frac{1}{2}BD$,

∴ $\angle DOC = 90^\circ$, $OD = OC$,

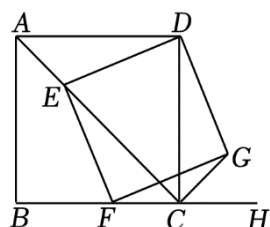
∵ $DP \parallel OC$, $DP = OC$,

∴ 四边形 $CODP$ 是平行四边形,

∵ $\angle DOC = 90^\circ$, $OD = OC$

∴ 平行四边形 $CODP$ 是正方形.

8. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 9, E 为对角线 AC 上一点, 连接 DE , 过点 E 作 $EF \perp DE$, 交射线 BC 于点 F , 以 DE , EF 为邻边作矩形 $DEFG$, 连接 CG , 下列结论中不正确的是()



A. 矩形 $DEFG$ 是正方形

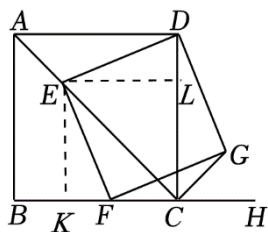
B. $\angle CEF = \angle ADE$

C. CG 平分 $\angle DCH$

D. $CE + CG = 9\sqrt{2}$

【答案】 B

【分析】

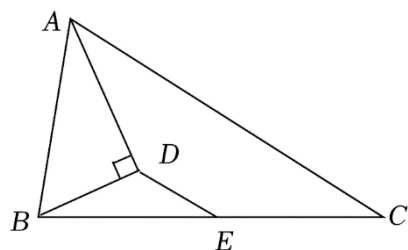


如图，作 $EK \perp BC$ 于点 K ， $EL \perp CD$ 于点 L ，易证 $\triangle EFK \cong \triangle EDL$ ，则 $ED = EF$ ，可证 $DEFG$ 是正方形，即 A 正确。易证 $\triangle ADE \cong \triangle CDG$ 可得： $AE = CG$ ，故 $CE + CG = AE + CE = AC = 9\sqrt{2}$ ，即 D 正确。由 $\triangle ADE \cong \triangle CDG$ 可知： $\angle DAE = \angle DCG = 45^\circ$ ，即 CG 平分 $\angle DCH$ ，即 C 正确。

习题 L8-37：平行四边形综合

参考答案与试题解析

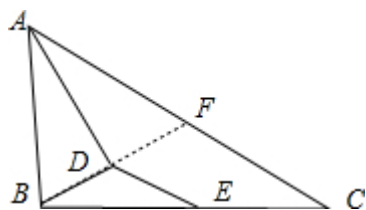
1. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAD = \angle CAD$ ， $BE = CE$ ， $AD \perp BD$ ， $DE = \frac{3}{2}$ ， $AB = 4$ ，则 AC 的值为()



- A. 6 B. $\frac{13}{2}$ C. 7 D. 8

【答案】C

【解答】解：如图，



延长 BD ，交 AC 于 F ，

$\because AD \perp BD$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle ADF = 90^\circ$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AFD$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle FAD \\ AD = AD \\ \angle ADB = \angle ADF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AFD(ASA)$ ，

$\therefore BD = DF$ ， $AF = AB = 4$ ，

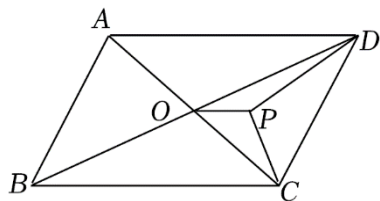
$\because BE = CE$ ，

$\therefore CF = 2DE = 3$ ，

$\therefore AC = AF + CF = 4 + 3 = 7$ 。

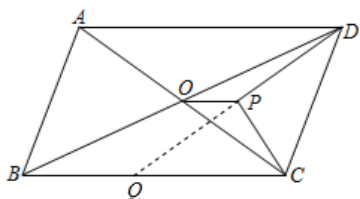
2. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， O 为对角线交点， DP 平分 $\angle ADC$ ， CP 平分 $\angle BCD$ ，

$AB=7$ ， $AD=10$ ，则 $OP=$ _____.



【答案】1.5.

【解答】



解：延长 DP 交 BC 于 Q ，如图所示：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OB=OD$ ， $CD=AB=7$ ， $BC=AD=10$ ， $AD\parallel BC$ ，

$\therefore \angle ADC+\angle BCD=180^\circ$ ， $\angle ADP=\angle CQD$ ，

$\because DP$ 平分 $\angle ADC$ ， CP 平分 $\angle BCD$ ，

$\therefore \angle ADP=\angle CDQ=\frac{1}{2}\angle ADC$ ， $\angle DCP=\angle QCP=\frac{1}{2}\angle BCD$ ，

$\therefore \angle CQD=\angle CDQ$ ，

$\therefore CQ=CD=7$ ，

$\therefore BQ=BC-CQ=3$ ，

$\therefore \angle CDQ+\angle DCP=\frac{1}{2}(\angle ADC+\angle BCD)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$ ，

$\therefore CP\perp DQ$ ，

$\therefore DP=QP$ ，

$\therefore OB=OD$ ，

$\therefore OP$ 是 $\triangle BDQ$ 的中位线，

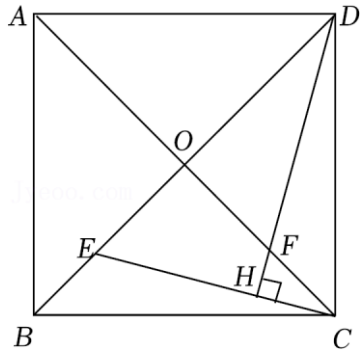
$\therefore OP=\frac{1}{2}BQ=1.5$ 。

3. 已知：如图，边长为 4 的菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，若

$$\angle CAD = \angle DBC.$$

(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

(2) E 是 OB 上一点， $BE=1$ ，且 $DH \perp CE$ ，垂足为 H ， DH 与 OC 相交于点 F ，求线段 OF 的长.



【答案】(1) 证明过程见解答；

$$(2) 2\sqrt{2} - 1.$$

【解答】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AD \parallel BC, \angle BAD = 2\angle DAC, \angle ABC = 2\angle DBC,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC,$$

$$\therefore 2\angle BAD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形；

(2) 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AB = BC = 4$ ，

$$\therefore AC \perp BD, AC = BD = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore OB = CO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}, DO = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle COB = \angle DOC = 90^\circ, CO = DO,$$

$$\therefore DH \perp CE, \text{垂足为 } H,$$

$$\therefore \angle DHE = 90^\circ, \angle EDH + \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECO + \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECO = \angle EDH,$$

在 $\triangle ECO$ 和 $\triangle FDO$ 中,

$$\begin{cases} \angle COE = \angle DOF = 90^\circ \\ OC = OD \\ \angle ECO = \angle FDO \end{cases},$$

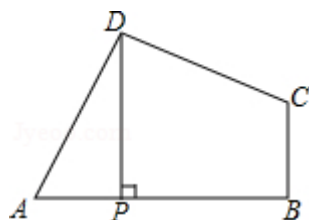
$\therefore \triangle ECO \cong \triangle FDO(ASA)$,

$\therefore OE = OF$.

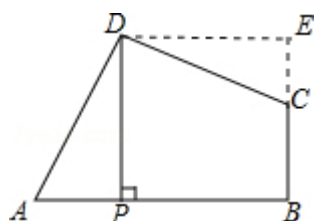
$\because BE = 1$,

$\therefore OE = OF = OB - BE = 2\sqrt{2} - 1$.

4. 如图所示, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, $AD = CD$, $DP \perp AB$ 于点 P , 若四边形 $ABCD$ 的面积是 36, 求 DP 的长.



【解答】



解: 作 $DE \perp BC$, 交 BC 延长线于 E , 如图,

$\because DP \perp AB$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $BEDP$ 为矩形,

$\therefore \angle PDE = 90^\circ$, 即 $\angle CDE + \angle PDC = 90^\circ$,

$\because \angle ADC = 90^\circ$, 即 $\angle ADP + \angle PDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADP = \angle CDE$,

在 $\triangle ADP$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} \angle APD = \angle CED \\ \angle ADP = \angle CDE, \\ AD = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle CDE,$$

$$\therefore DP = DE, \quad S_{\triangle ADP} = S_{\triangle CDE},$$

$$\therefore \text{四边形 } BEDP \text{ 为正方形, } S_{\text{四边形 } ABCD} = S_{\text{正 } BEDP},$$

$$\therefore DP^2 = 36,$$

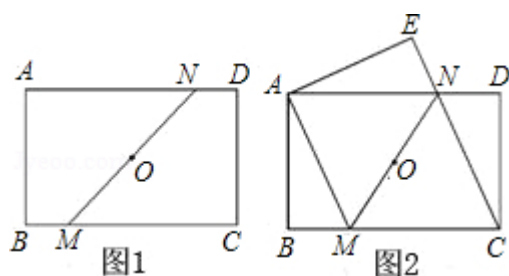
$$\therefore DP = 6.$$

5. 已知: 矩形 $ABCD$ 中 $AD > AB$, O 是对角线的交点, 过 O 任作一直线分别交 BC 、 AD 于点 M 、 N (如图 1).

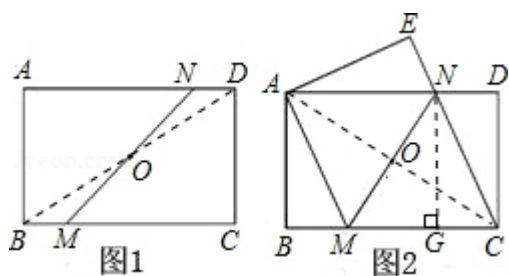
(1) 求证: $BM = DN$;

(2) 如图 2, 四边形 $AMNE$ 是由四边形 $CMND$ 沿 MN 翻折得到的, 连接 CN , 求证: 四边形 $AMCN$ 是菱形;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $\triangle CDN$ 的面积与 $\triangle CMN$ 的面积比为 1:3, 求 $\frac{MN}{DN}$ 的值.



【解答】



(1) 连接 BD , 则 BD 过点 O ,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OBM = \angle ODN,$$

$$\text{又 } OB = OD, \quad \angle BOM = \angle DON,$$

$$\therefore \triangle OBM \cong \triangle ODN,$$

$$\therefore BM = DN;$$

(2) $\therefore$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC,$$

$$\text{又 } BM = DN,$$

$$\therefore AN = CM,$$

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形,

由翻折得, $AM = CM$,

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是菱形;

(3) 过 N , 做 $NG \perp BC$ 交 BC 于 G ,

$$\because S_{\triangle CDN} = \frac{1}{2} \cdot DN \cdot CD, \quad S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot NG,$$

$$\text{又 } CD = NG, \quad S_{\triangle CDN} : S_{\triangle CMN} = 1:3,$$

$$\therefore DN : CM = 1:3,$$

设 $DN = k$, 则 $CN = CM = 3k$,

则 $CG = DN = k$, $MG = CM - CG = 2k$,

$$NG = \sqrt{CN^2 - CG^2} = \sqrt{9k^2 - k^2} = 2\sqrt{2}k,$$

$$\therefore MN = \sqrt{MG^2 + NG^2} = \sqrt{4k^2 + 8k^2} = 2\sqrt{3}k,$$

$$\therefore \frac{MN}{DN} = \frac{2\sqrt{3}k}{k} = 2\sqrt{3};$$