

习题 L9-06：二次函数的图象和性质（二）

参考答案与试题解析

1. 抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 是抛物线 $y = 2x^2$ 向()得到的.

A. 下平移 3 单位

B. 上平移 3 单位

C. 下平移 $\frac{3}{2}$ 单位

D. 上平移 $\frac{3}{2}$ 单位

【答案】 A

2. 与抛物线 $y = -5x^2 - 1$ 顶点相同，形状也相同，而开口方向相反的抛物线所对应的函数是()

A. $y = -5x^2 - 1$

B. $y = 5x^2 - 1$

C. $y = -5x^2 + 1$

D. $y = 5x^2 + 1$

【答案】 B

3. 若在同一平面直角坐标系中，作 $y = 3x^2$ ， $y = x^2 - 2$ ， $y = -2x^2 + 1$ 的图象，则它们()

A. 都关于 y 轴对称

B. 开口方向相同

C. 都经过原点

D. 互相可以通过平移得到

【答案】 A

4. 已知点 $P(-4, y_1)$ 、 $Q(3, y_2)$ 都在二次函数 $y = -2x^2 + 5$ 的图象上，则 y_1 与 y_2 的大小关系式()

A. $y_1 > y_2$

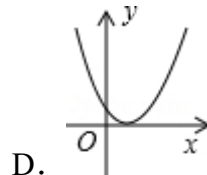
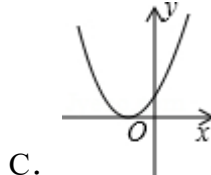
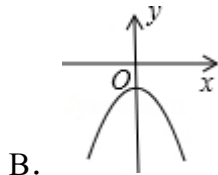
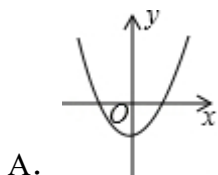
B. $y_1 < y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法确定

【答案】 B

5. 下列各图象中有可能是函数 $y = ax^2 + a (a \neq 0)$ 的图象的是()



【答案】 B

【分析】当 $a > 0$ 时，开口向上，顶点在 y 轴的正半轴；当 $a < 0$ 时，开口向下，顶点在 y 轴的负半轴.

6. 下列抛物线顶点坐标为 $(1,0)$ 的是()

- A. $y = x^2 + 1$ B. $y = x^2 - 1$ C. $y = (x+1)^2$ D. $y = (x-1)^2$

【答案】D

7. 由二次函数 $y = 3(x-5)^2 + 1$ ，以下结论正确的是()

- A. 开口向下
B. 对称轴是 $x = -1$
C. 最小值为1
D. 当 $x < 5$ 时， y 随着 x 的增大而增大

【答案】C

【分析】二次函数 $y = 3(x-5)^2 + 1$ 的图象开口向上，对称轴是直线 $x = 5$ ，函数有最小值为1，根据顶点式得到顶点坐标为 $(5,1)$ ，当 $x < 5$ 时， y 随 x 的增大而减小.

8. 将抛物线 $y = 2x^2$ 向上平移3个单位长度，再向右平移2个单位长度，所得到的抛物线为()

- A. $y = 2(x+2)^2 + 3$ B. $y = 2(x-2)^2 + 3$ C. $y = 2(x-2)^2 - 3$ D. $y = 2(x+2)^2 - 3$

【答案】B

9. 已知抛物线 $y = -3(x-5)^2 + 7$ 过点 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + 8, y_0)$ ，求 x_0 的值.

【答案】1.

10. 已知点 $A(a, 2)$ ， $B(b, 2)$ ， $C(c, -1)$ 都在抛物线 $y = m(x-2)^2 + m^2 + 4$ 上，若 $m < 0$ ，且点 A 在点 B 左侧，点 C 在第三象限，则下列选项正确的是()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

【答案】D

【分析】 $\because$ 抛物线 $y = m(x-2)^2 + m^2 + 4(m < 0)$ ，

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为直线 $x=2$ ，抛物线开口向下，当 $x>2$ 时， y 随 x 的增大而减小，当 $x<2$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 点 $A(a,2)$ ， $B(b,2)$ ， $C(c,-1)$ 都在抛物线 $y=m(x-2)^2+m^2+4$ 上，点 A 在点 B 左侧，点 C 在第三象限，

$\therefore$ 点 $A(a,2)$ ， $C(c,-1)$ 在对称轴的左侧，

$\therefore c < a < b$.

习题 L9-07：二次函数的图象和性质（三）

参考答案与试题解析

1. 指出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，并判断有最大值还是有最小值：

$$(1) y = x^2 - 4x + 5;$$

$$(2) y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 4;$$

$$(3) y = 3x^2 - 2x + 1;$$

$$(4) y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1.$$

【解答】解：(1) $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$,

开口向上；对称轴为直线 $x = 2$ ；顶点坐标 $(2, 1)$ ，函数有最小值 1；

$$(2) y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 4 = -\frac{1}{4}(x + 3)^2 + \frac{25}{4},$$

开口向下；对称轴为直线 $x = -3$ ；顶点坐标 $(-3, \frac{25}{4})$ ，函数有最大值 $\frac{25}{4}$ ；

$$(3) y = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3},$$

开口向上；对称轴为直线 $x = \frac{1}{3}$ ；顶点坐标 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ，函数有最小值 $\frac{2}{3}$ ；

$$(4) y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3,$$

开口向下；对称轴为直线 $x = 2$ ；顶点坐标 $(2, 3)$ ，函数有最大值 3.

2. 已知二次函数 $y = -x^2 + 2x + 4$ ，则下列说法正确的是()

- A. 该函数的图象开口向上
- B. 该函数图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, 5)$
- C. 当 $x = 1$ 时， y 有最大值为 5
- D. 当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大

【答案】C

3. 若点 $A(-3, y_1)$ ， $B(\frac{1}{2}, y_2)$ ， $C(2, y_3)$ 在二次函数 $y = x^2 + 2x + 1$ 的图象上，则 y_1 ，

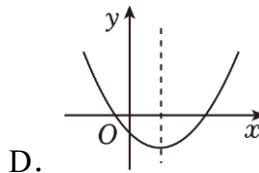
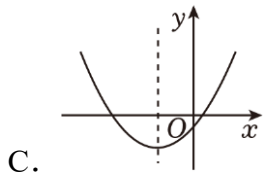
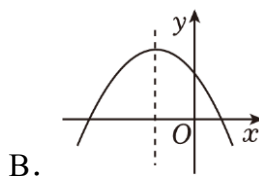
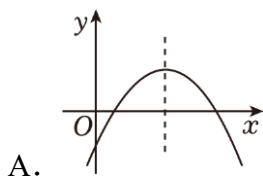
y_2 , y_3 的大小关系是()

- A. $y_2 < y_1 < y_3$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_1 < y_2 < y_3$ D. $y_3 < y_2 < y_1$

【答案】 A

【分析】 抛物线 $y = x^2 + 2x + 1$ 的开口向上，且对称轴是直线 $x = -1$ ，所以函数图象上的点，离对称轴越近，函数值越小.

4. 已知 $abc < 0$ ，那么函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象可能是()



【答案】 C

【分析】 由题意，当 $a > 0$ 时， $\because abc < 0$ ， $\therefore b$ 、 c 异号，由 C、D 图可知 $c < 0$ ， $\therefore b > 0$.

$\therefore -\frac{b}{2a} < 0$ ，即函数对称轴在 y 轴左侧，选项 D 不符合题意，C 符合题意.

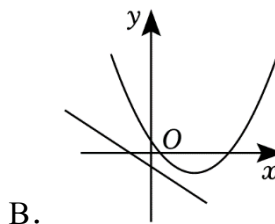
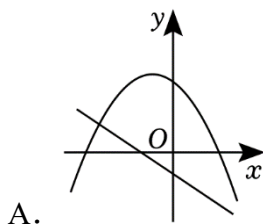
由 B 图可知 $c > 0$ ， $a < 0$ ，故 $b > 0$ ，

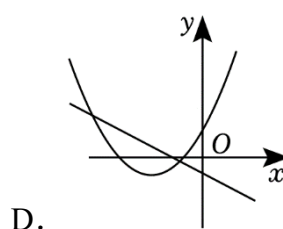
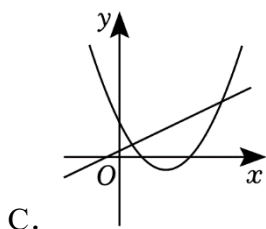
$\therefore -\frac{b}{2a} > 0$ ，即函数对称轴在 y 轴右侧，选项 B 不符合题意.

对于 A 选项，由图可得 $a < 0$ ， $c < 0$ ，

又 $abc < 0$ ， $\therefore b < 0$. $\therefore -\frac{b}{2a} < 0$ ，即函数对称轴在 y 轴左侧，A 不正确.

5. 在同一坐标系中，一次函数 $y = ax + a$ 和二次函数 $y = -ax^2 + 3x + 2$ 的图象可能是()





【答案】D

【分析】一次函数 $y = ax + a$ 过定点 $(-1, 0)$,

二次函数 $y = -ax^2 + 3x + 2$ 过定点 $(0, 2)$.

当 $a < 0$ 时, 一次函数中 y 随 x 的增大而减小,

此时抛物线的开口向上, 且对称轴在 y 轴左侧.

所以 A 和 B 都不正确.

当 $a > 0$ 时, 一次函数中 y 随 x 的增大而增大,

此时抛物线的开口向下. 所以 C 不正确.

6. 已知二次函数 $y = x^2 + 4kx + 2$, 当 $x \leq 6$ 时, y 随着 x 的增大而减小, 则实数 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $k \leq -3$.

【解答】解: $\because$ 函数 $y = x^2 + 4kx + 2$, $\therefore$ 对称轴为直线 $x = -2k$.

$\because$ 在 $x \leq 6$ 时, y 随着 x 的增大而减小, $-2k \geq 6$, $k \leq -3$.

7. 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$, 当自变量 x 取两个不同的值 x_1 、 x_2 时函数值相等,

则当自变量 x 取 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 时的函数值与 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时的函数值相等.

【答案】1.

【分析】由题意可知 x_1 、 x_2 关于对称轴对称, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 为函数对称轴的横坐标.

8. 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ (其中 b , c 是常数) 过点 $A(2, 6)$, 且抛物线的对称轴与线段 $y = 0 (1 \leq x \leq 3)$ 有交点, 则 c 的值不可能是 ()

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

【答案】A

$$\text{【解答】} \begin{cases} 4 + 2b + c = 6 \\ 1 \leq -\frac{b}{2} \leq 3 \end{cases}$$

解得: $6 \leq c \leq 14$, 故选: A.

9. 已知抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上有且只有三个点到 x 轴的距离等于 p , 点 $A(m, n)$ 在抛物线上, 且点 A 到 y 轴的距离小于 2.

(1) $p =$ _____.

(2) n 的取值范围是 _____.

【答案】 4, $-3 < n < 5$

【解答】(1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上有且只有三个点到 x 轴的距离等于 p ,

$\therefore p$ 为抛物线顶点到 x 的距离,

$$\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为 $(1, -4)$,

$$\therefore p = 4.$$

(2) 令点 A 到 y 轴的距离等于 2, 有 $|m| = 2$, 即 $m = \pm 2$,

当 $m = 2$ 时, 将点 $A(2, n)$ 代入 $y = x^2 - 2x - 3$, 解得: $n = -3$,

当 $m = -2$ 时, 将点 $A(-2, n)$ 代入 $y = x^2 - 2x - 3$, 解得: $n = 5$,

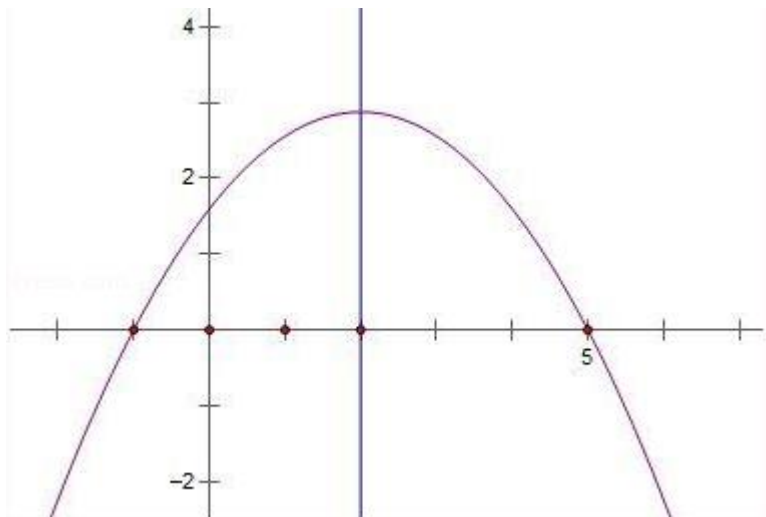
$\therefore$ 点 A 到 y 轴的距离小于 2, 有 $|m| < 2$, 即 $-2 < m < 2$,

$$\therefore -3 < n < 5,$$

10. 已知 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$, 图象过点 $(-1, 0)$, 对称轴为 $x = 2$, 有下列结论:

(1) $4a + b = 0$; (2) $c + 9a > 3b$; (3) $8a + 7b + 2c < 0$.

正确结论有几个?



【解答】解：（1） $\because$ 抛物线的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = 2$ ，

$\therefore b = -4a$ ，即 $4a + b = 0$ ，所以①正确．

（2） $\because$ 当 $x = -3$ 时， $y < 0$ ，

$\therefore 9a - 3b + c < 0$ ，即 $c + 9a < 3b$ ．

$\therefore$ ②错误．

（3） $\because$ 抛物线与 x 的交点为 $(-1, 0)$ ，

$\therefore a - b + c = 0$ ，

$\because b = -4a$ ，

$a + 4a + c = 0$ ，即 $c = -5a$ ，

$\therefore 8a + 7b + 2c = 8a - 28a - 10a = -30a$ ，

$\because a < 0$ ，

$\therefore 8a + 7b + 2c > 0$ ．

$\therefore$ ③错误．

所以正确的有 1 个．

11. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx - 1$ 的图象经过点 $(2, -1)$ ，且这个函数有最小值 -3 ，求这个函数的关系式．

【解答】解：由 $y = ax^2 + bx - 1$ 可知，抛物线过点 $(0, -1)$ ，

又抛物线经过点 $(2, -1)$ ，

∴ 抛物线对称轴为 $x=1$ ，即抛物线顶点坐标为 $(1,-3)$ ，

设抛物线解析式为 $y=a(x-1)^2-3$ ，

将点 $(2,-1)$ 代入，得 $a-3=-1$ ，解得 $a=2$ ，

抛物线解析式为 $y=2(x-1)^2-3=2x^2-4x-1$ 。

12. 分别根据下列条件，求二次函数的表达式。

(1) 图象经过点 $(0,0)$ ， $(1,1)$ 和 $(2,5)$ ；

(2) 图象的顶点坐标是 $(-2,1)$ ，且经过点 $(1,-2)$ 。

【解答】解：(1) 设二次函数的表达式 $y=ax^2+bx+c$ ，把 $(0,0)$ ， $(1,1)$ 和 $(2,5)$ 代入

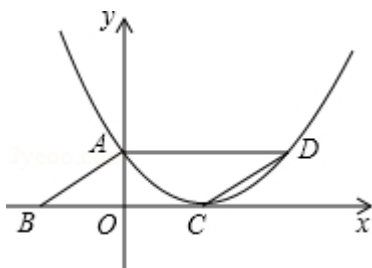
$$y=ax^2+bx+c \text{ 得 } \begin{cases} 0=c \\ 1=a+b+c \\ 5=4a+2b+c \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}.$$

所以二次函数的表达式 $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x$ 。

(2) 设二次函数的表达式 $y=a(x+2)^2+1$ ，把 $(1,-2)$ 代入得 $-2=9a+1$ ，解得 $a=-\frac{1}{3}$ 。

所以二次函数的表达式 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2+1$ 。

13. 如图，抛物线的顶点 C 在 x 轴上，点 A 为抛物线与 y 轴的交点，点 D 在抛物线上，点 B 在 x 轴负半轴，四边形 $ABCD$ 为平行四边形， $BC=6$ ， $S_{\square ABCD}=12$ ，求抛物线的解析式。



【解答】解：设抛物线的解析式是 $y=ax^2+bx+c$ ，

∵ $BC=6$ ， $S_{\square ABCD}=12$ ，

$$\therefore AO = 12 \div 6 = 2 ,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标是 } (0,2) ,$$

$$\therefore c = 2 ;$$

$$\because AD = BC = 6 ,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标是 } (6,2) ,$$

$$\therefore 36a + 6b + 2 = 2 \dots (1)$$

$$\because \text{点 } C \text{ 的坐标是 } (3,0) ,$$

$$\therefore 9a + 3b + 2 = 0 \dots (2) ,$$

由 (1) (2), 可得

$$a = \frac{2}{9} , \quad b = -\frac{4}{3} ,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式是 } y = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 .$$

习题 L9-08：二次函数的最值问题

参考答案与试题解析

1. 二次函数 $y = -2x^2 - 4x + 1$ ，当 $-3 \leq x \leq 0$ 时，求它的最大值与最小值.

【解答】解：∵ 二次函数 $y = -2x^2 - 4x + 1$ 对称轴为 $y = -\frac{b}{2a} = -1$ ，且 $a = -2 < 0$ ，

∴ 当 $-3 \leq x \leq 0$ 时， $x = -1$ ，二次函数有最大值为 $-2 + 4 + 1 = 3$ ，

∵ $|-3 - (-1)| = 2$ ， $|0 - (-1)| = 1$ ，

∴ 当 $-3 \leq x \leq 0$ 时， $x = -3$ 时，二次函数有最小值为 $-18 + 12 + 1 = -5$ ，

综上，二次函数 $y = -2x^2 - 4x + 1$ ，当 $-3 \leq x \leq 0$ 时，它的最大值为 3，最小值为 -5.

2. 二次函数 $y = -x^2 - 2x + c^2 - 2c$ 在 $-3 \leq x \leq 2$ 的范围内有最小值为 -5，则 c 的值()

A. 3 或 -1 B. -1 C. -3 或 1 D. 3

【答案】A

【解答】解：∵ $y = -x^2 - 2x + c^2 - 2c = -(x+1)^2 + c^2 - 2c + 1$ ，

∴ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x = -1$ ，

∵ $2 - (-1) > -1 - (-3)$ ，

∴ 在 $-3 \leq x \leq 2$ 的范围内，

$x = 2$ 时， $y = -4 - 4 + c^2 - 2c = c^2 - 2c - 8 = (c-1)^2 - 9$ 为函数最小值，

∴ $(c-1)^2 - 9 = -5$ ，解得 $c = 3$ 或 $c = -1$.

3. 已知二次函数 $y = x^2 - 2mx + m^2 + 1$ (m 为常数)，当自变量 x 的值满足 $-3 \leq x \leq -1$ 时，与其对应的函数值 y 的最小值为 5，则 m 的值为()

A. 1 或 -3 B. -3 或 -5 C. 1 或 -1 D. 1 或 -5

【答案】D

【解答】解：∵ $y = x^2 - 2mx + m^2 + 1 = (x-m)^2 + 1$ ，

∴ 当 $x = m$ 时， y 的最小值为 1.

当 $m < -3$ 时, 在 $-3 \leq x \leq -1$ 中, y 随 x 的增大而增大, 即在 $x = -3$ 时取到最小值,

$$\therefore 9 + 6m + m^2 + 1 = 5,$$

解得: $m_1 = -5$, $m_2 = -1$ (舍去);

当 $-3 \leq m \leq -1$ 时, y 的最小值为 1, 不符题意;

当 $m > -1$ 时, 在 $-3 \leq x \leq -1$ 中, y 随 x 的增大而减小, 即在 $x = -1$ 时取到最小值,

$$\therefore 1 + 2m + m^2 + 1 = 5,$$

解得: $m_1 = -3$ (舍去), $m_2 = 1$.

$\therefore m$ 的值为 -5 或 1.

4. y 关于 x 的二次函数 $y = ax^2 + a^2$, 在 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时有最大值 6, 则 $a =$ _____.

【答案】 2 或 $-\sqrt{6}$.

【解答】 解: 当 $a < 0$, $x = 0$ 时, 函数取到最大值为 $y = a^2 = 6$,

解得: $a_1 = \sqrt{6}$ (舍), $a_2 = -\sqrt{6}$,

当 $a > 0$, $x = -1$ 时, 函数取到最大值为 $y = a + a^2 = 6$,

解得: $a = 2$ 或 $a = -3$ (舍).

综上, a 的值是 2 或 $-\sqrt{6}$.

5. 已知 $0 \leq x \leq 1$, 函数 $f(x) = x^2 - ax + \frac{1}{2}a$ ($a > 0$) 的最小值为 m , 求 m 的值. (用含 a 的式子表示)

【解答】 解: $f(x) = x^2 - ax + \frac{1}{2}a$ ($a > 0$) 的对称轴为 $x = \frac{a}{2}$,

$0 < \frac{a}{2} \leq 1$, 即 $0 < a \leq 2$ 时, $x = \frac{a}{2}$, 函数取到最小值, $m = -\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}$;

$\frac{a}{2} > 1$, 即 $a > 2$ 时, $x = 1$, 函数取到最小值, $m = 1 - \frac{a}{2}$.

6. 已知抛物线 $y = -x^2 + 2x + 1$ 在自变量 x 的值满足 $t \leq x \leq t + 2$ 时, 与其对应的函数值 y 的最小值为 -7, 求此时 t 的值为()

A. 1 或 -2

B. 2 或 -2

C. 3 或 -1

D. -1 或 -2

【答案】 B

【解答】解： $y = -x^2 + 2x + 1 = -(x - 1)^2 + 2$

当 $x = t$ 时， $y = -t^2 + 2t + 1$ ，

当 $x = t + 2$ 时， $y = -(t + 2)^2 + 2(t + 2) + 1 = -t^2 - 2t + 1$ ；

当 $t + 2 \leq 1$ ，即 $t \leq -1$ 时，

抛物线在 $x = t$ 时，取得最小值，即 $y = -t^2 + 2t + 1 = -7$ ，

解得： $t = 4$ （舍）或 -2 ，故 $t = -2$ ；

当 $t \geq 1$ 时，

抛物线在 $x = t + 2$ 时，取得最小值，即 $y = -t^2 - 2t + 1 = -7$ ，

解得： $t = -4$ （舍）或 2 ，即 $t = 2$ ，

当 $-1 < t < 1$ 时，

当 $-1 < t < 0$ 时，

抛物线在 $x = t$ 时，取得最小值，即 $y = -t^2 + 2t + 1 = -7$ ，

解得： $t = 4$ （舍）或 -2 （舍），

当 $0 \leq t < 1$ 时，抛物线在 $x = t + 2$ 时，取得最小值，

即 $y = -t^2 - 2t + 1 = -7$ ，

解得： $t = -4$ （舍）或 2 （舍）；

综上， $t = 2$ 或 -2 ．

7. 二次函数 $y = -x^2 + 6x - 7$ 当 x 取值为 $t - 2 \leq x \leq t$ 时有最大值 $y = -(t - 3)^2 + 2$ ，则 t 的取值范围为()

A. $t \leq 0$

B. $t \geq 3$

C. $t \leq 3$

D. 以上都不对

【答案】 C

【解答】解： $\because y = -x^2 + 6x - 7 = -(x - 3)^2 + 2$ ，

当 $t - 2 \leq 3 \leq t$ 时，即 $3 \leq t \leq 5$ 时，函数有最大值 $y = 2$ ，

当 $t \leq 3$ 时，函数在 $x = t$ 时取到最大值，为 $y = -(t - 3)^2 + 2$ ，

当 $t - 2 \geq 3$ ，即 $t \geq 5$ 时，

函数在 $x = t - 2$ 时取到最大值，为 $y = -(t - 2 - 3)^2 + 2 = -(t - 5)^2 + 2$ ．

8. 已知关于 x 的二次函数 $y = x^2 - 2mx + 3$.

(1) 若 $m=1$ 时, 求函数 y 的最小值.

(2) 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, 函数 y 的值恒大于 1, 求 m 的取值范围.

【解答】解: (1) $\because m=1$,

$\therefore$ 二次函数 $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$.

$\therefore$ 抛物线开口向上, y 有最小值, 最小值为 2.

(2) $y = x^2 - 2mx + 3 = (x-m)^2 - m^2 + 3$,

当 $m \geq 0$ 时, 函数在 $x=0$ 时取到最小值为 3, 满足题意;

当 $m \leq -1$ 时, 函数在 $x=-1$ 时取到最小值为 $2m+4$, 则 $2m+4 > 1$,

解得 $m > -\frac{3}{2}$;

当 $-1 < m < 0$ 时, 函数在顶点取到最小值为 $-m^2 + 3 > 1$;

综上, $m > -\frac{3}{2}$.

习题 L9-09：二次函数与一元二次方程

参考答案与试题解析

1. 二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的图象与 x 轴的交点个数是()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 不能确定

【答案】 B

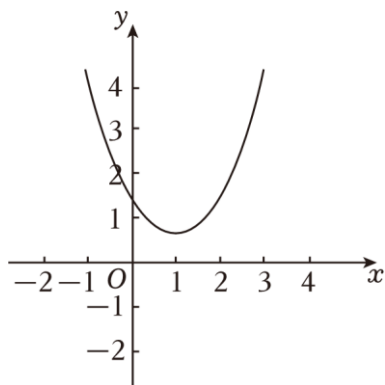
2. 已知二次函数 $y = x^2 - 5x + m$ (m 为常数) 的图象与 x 轴的一个交点为 $(1, 0)$ ，则关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 的两个实数根是()

- A. $x_1 = 1, x_2 = -1$ B. $x_1 = 1, x_2 = 4$ C. $x_1 = 1, x_2 = 0$ D. $x_1 = 1, x_2 = 5$

【答案】 B

【分析】 函数关于直线 $x = \frac{5}{2}$ 对称， $(1, 0)$ 的对称点为 $(4, 0)$ 。

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 如图所示，则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的情况为()



- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 有实数根 D. 没有实数根

【答案】 D

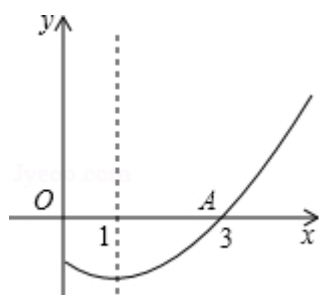
4. 若抛物线 $y = (x+1)(k-x)$ 与 x 轴有两个交点，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \neq -1$.

【分析】 依据题意，令 $y = 0$ ，从而 $0 = (x+1)(k-x)$ ，故可得 $x = -1$ 或 $x = k$ ，又抛物线 $y = (x+1)(k-x)$ 与 x 轴有两个交点，进而可以判断得解.

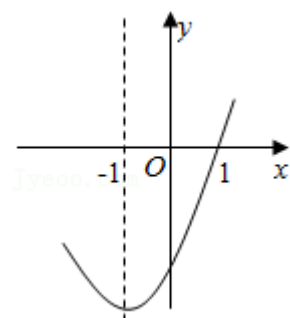
5. 如图, 是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的一部分, 其对称轴为直线 $x = 1$, 它与 x 轴的一个交点为 $A(3, 0)$, 根据图象, 可知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解

是_____.



【答案】 3 或 -1.

6. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示, 对称轴为直线 $x = -1$, 则当 $y < 0$, x 的取值范围是()



- A. $x < 1$ B. $x > -1$ C. $-3 < x < 1$ D. $-4 \leq x \leq 1$

【答案】 C

7. 抛物线经过 $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(2, 6)$, 求抛物线的解析式.

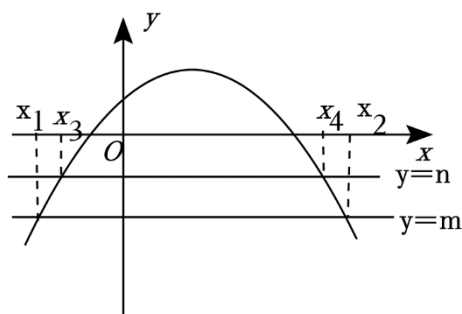
【答案】 $y = 2x^2 - 2$.

8. 若 $m < n < 0$, 且关于 x 的方程 $ax^2 - 2ax + 3 - m = 0 (a < 0)$ 的解为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 关于 x 的方程 $ax^2 - 2ax + 3 - n = 0 (a < 0)$ 的解为 $x_3, x_4 (x_3 < x_4)$. 则下列结论正确的是()

- A. $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ B. $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ C. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ D. $x_3 < x_4 < x_1 < x_2$

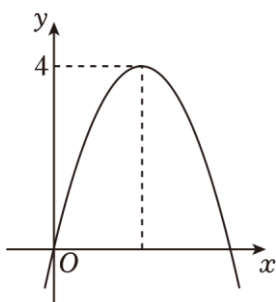
【答案】 B

【分析】



关于 x 的方程 $ax^2 - 2ax + 3 - m = 0 (a < 0)$ 的解为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 可理解为抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 与直线 $y = m$ 的两交点的横坐标分别为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，如图，同样得到抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 与直线 $y = n$ 的两交点的横坐标分别为 $x_3, x_4 (x_3 < x_4)$ ，如图，然后利用函数图象进行判断.

9. 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图所示，若一元二次方程 $ax^2 + bx - m = 1$ 有实数根，则 m 的最大值为()



A. 4

B. -4

C. 3

D. -3

【答案】C

【解答】解：由图象可得，

二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的最大值是 $y = 4$ ，

$\therefore$ 一元二次方程 $ax^2 + bx - m = 1$ 有实数根，

即一元二次方程 $ax^2 + bx = m + 1$ 有实数根，

也就是 $y = ax^2 + bx$ 与 $y = m + 1$ 有交点，

$m + 1 \leq 4$ ，解得： $m \leq 3$ ，

$\therefore m$ 的最大值是 3.

10. 若函数 $y = kx^2 - 6x + 3$ 的图象与 x 轴有交点，则 k 的取值范围是()

A. $k < 3$

B. $k < 3$ 且 $k \neq 0$

C. $k \leq 3$

D. $k \leq 3$ 且 $k \neq 0$

【答案】C

【解答】解：当 $k \neq 0$ 时，由二次函数与 x 轴有交点，可得 $kx^2 - 6x + 3 = 0$ 有实根.

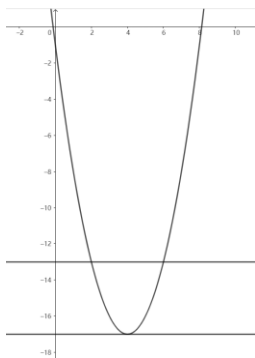
即 $b^2 - 4ac = 36 - 12k \geq 0$,

解得 $k \leq 3$.当 $k = 0$ 时，函数是一次函数，与 x 轴交于 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，满足题意.所以 k 的取值范围为： $k \leq 3$.11. 若函数 $y = (m+1)x^2 - 3x + 2$ 的图象与 x 轴只有一个交点，则 m 的值为_____.【答案】-1 或 $\frac{1}{8}$.【解答】①若函数是一次函数，与 x 轴只有一个交点，则 $m+1=0$ ， $m=-1$ ；②若函数是二次函数，与 x 轴只有一个交点，则 $\Delta=0$ ，

$$\therefore (-3)^2 - 4 \times (m+1) \times 2 = 0$$
，解得 $m = \frac{1}{8}$.

12. 函数 $y = -x^2 + mx + 1$ 的对称轴是直线 $x = 4$ ，则关于 x 的方程 $x^2 - mx - 1 - n = 0$ 在 $2 \leq x \leq 9$ 的范围内有两个不相等的实数根，则 n 的取值范围是_____.【答案】 $-17 < n \leq -13$.

【分析】

 $x = \frac{m}{2} = 4$ ，解得： $m = 8$ ，方程为： $x^2 - 8x - 1 - n = 0$ ，如图，即函数 $y = x^2 - 8x - 1$ 与 $y = n$ 的图象在 $2 \leq x \leq 9$ 的范围内有两个不同的交点. $x = 2$ 时， $y = x^2 - 8x - 1 = -13$ ，则 $-17 < n \leq -13$ ；

13. 根据下列表格, 判断出方程 $8x^2 + 9x - 1 = 0$ 的一个近似解 (结果精确到 0.01) 是 ()

x	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1
$8x^2 + 9x - 1$	3.5	2.08	0.82	-0.28	-1.22

A. -1.43

B. -1.33

C. -1.23

D. -1.13

【答案】C

14. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 函数 y 与自变量 x 的部分对应值如表所示

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	-2	3	6	7	6	...

下列说法错误的是 ()

A. 图象开口向下

B. 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个正根在 4 和 5 之间

C. 当 $-1 < x < 3$ 时, $-2 < y < 6$

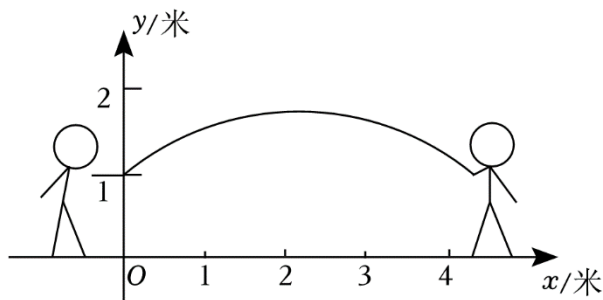
D. 当 $x > 3$ 时, y 随 x 的增大而减小

【答案】C

习题 L9-10：实际问题与二次函数

参考答案与试题解析

1. 跳绳是大家喜爱的一项体育运动，当绳子甩到最高处时，其形状视为一条抛物线. 如图是小冬与小雪将绳子甩到最高处时的示意图，已知两人拿绳子的手离地面的高度都为 1 米，并且相距 4 米，现以两人的站立点所在的直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，其中小冬拿绳子的手的坐标是 $(0,1)$. 身高 1.60 米的小丽站在绳子的正下方，且距 y 轴 1 米时，绳子刚好经过她的头顶. 若身高 1.75 米的小伟站在这条绳子的正下方，他距 y 轴 m 米，为确保绳子超过他的头顶，则 m 的取值范围为 _____.



【答案】 $1.5 < m < 2.5$.

【解答】解：由题意，设解析式为 $y = a(x-2)^2 + k$,

又该函数过点 $(1, 1.6)$ 、 $(0, 1)$,

$$\therefore a = -\frac{1}{5}, \quad k = \frac{9}{5}.$$

$$\therefore \text{解析式为 } y = -\frac{1}{5}(x-2)^2 + \frac{9}{5}.$$

又令 $y = 1.75$ 时，

$$\therefore x = 2.5 \text{ 或 } x = 1.5.$$

$$\therefore 1.5 < m < 2.5.$$

2. 你见过“倒过来的桥”吗？位于我国湖南省邵阳洞口县的淘金大桥，大桥的位置在一个山谷当中，桥全长 70 米，这座桥桥面是水平的，而桥底则是近似为抛物线，桥面和桥底用若干混凝土石柱竖直支撑.

小明在研究淘金大桥时测得当距离桥头 35 米时，桥面和桥底的支撑石柱最长，

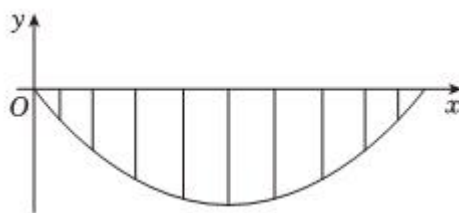
为 20 米，小明以桥面为 x 轴，桥头为原点建立如图的平面直角坐标系，设桥底的函数解析式为 $y = a(x-h)^2 + k$.

(1) 求该函数的解析式；

(2) 思考：

①若该桥平均分布 9 根石柱支撑，求离桥头最近的石柱的长度；

②若石柱的长度为 16.8 米，则这根石柱安放的位置距离桥头有多远？



【答案】 (1) $y = \frac{4}{245}(x-35)^2 - 20$; (2) ①7.2 米；②21 米或 49 米.

【解答】 解：(1) 由题意得，抛物线的顶点为 $(35, -20)$,

$\therefore$ 抛物线为 $y = a(x-35)^2 - 20$.

又抛物线过原点 $(0,0)$,

$$\therefore a \times 35^2 - 20 = 0 .$$

$$\therefore a = \frac{4}{245} .$$

$\therefore$ 抛物线为 $y = \frac{4}{245}(x-35)^2 - 20$.

(2) ①由题意得，离桥头最近石柱离 y 轴的距离为 $\frac{70}{9+1} = 7$ (米) .

$$\therefore \text{可令 } x = 7, \text{ 则 } y = \frac{4}{245}(7-35)^2 - 20 = -7.2 .$$

$\therefore$ 离桥头最近石柱的长度 7.2 米.

②由题意，令 $y = -16.8$,

$$\therefore -16.8 = \frac{4}{245}(x-35)^2 - 20 .$$

$$\therefore x = 21 \text{ 或 } x = 49 .$$

$\therefore$ 这根石柱安放的位置距离桥头 21 米或 49 米的地方.

3. 如图 1，公园草坪的地面 O 处有一根直立水管，喷水口可上下移动，喷出的抛物线形水线也随之上下平移，图 2 是其示意图. 开始喷水后，若喷水口在 O 处，

水线落地点为 A ，若喷水口上升到 P 处，水线落地点为 B ，记 OP 长度为 h 。



图 1

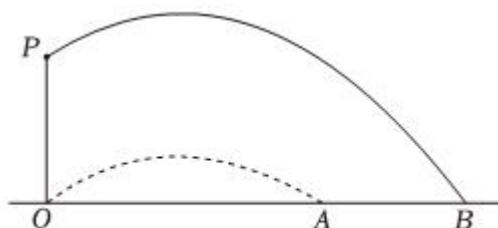


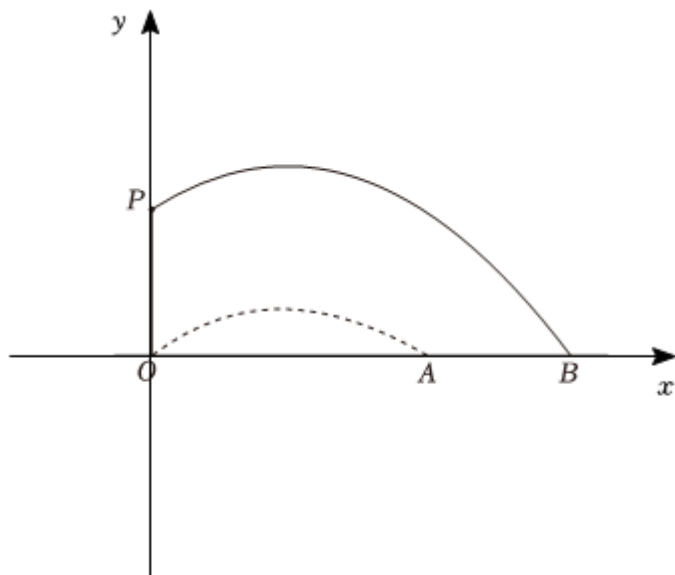
图 2

已知 $OA = 4m$ 。若喷水口在 P 处， $h = 1.5m$ ， $OB = 6m$ 。

- ①求水线最高点与点 B 之间的水平距离；
- ②求水线的最大高度；
- ③身高 $1.5m$ 的小红要从水线下某点经过，为了不被水喷到，该点与 O 的水平距离应满足什么条件？请说明理由。

【答案】 ① $4m$ ；② $2m$ ；③ $0 < x < 4$ 。

【解答】 解：①如图，以 OP 所在直线为 y 轴， OB 所在直线为 x 轴， O 为原点，建立平面直角坐标系。



$$\because OA = 4m,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴是直线 } x = 2.$$

$$\text{又 } OB = 6m,$$

$$\therefore \text{水线最高点与点 } B \text{ 之间的水平距离为: } 6 - 2 = 4(m).$$

②由题意，抛物线形水线也随之上下平移，

∴可设过点 P 的抛物线为 $y = a(x-2)^2 + h$.

代入 $P(0,1.5)$, $B(6,0)$,

$$\therefore \begin{cases} 4a + h = 1.5 \\ 16a + h = 0 \end{cases}.$$

$$\therefore a = -\frac{1}{8}, \quad h = 2.$$

∴所求解析式为 $y = -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 2$.

∴水线的最大高度为 $2m$.

③令 $y = 1.5$,

$$\therefore 1.5 = -\frac{1}{8}(x-2)^2 + 2.$$

∴ $x = 0$ 或 4 .

∴为了不被水喷到,

∴ $0 < x < 4$.

4. 某水果超市以每斤 3 元的价格购进苹果若干斤, 然后以每斤 5 元的价格出售, 每天可售出 100 斤, 通过调查发现, 这种苹果每斤的售价每降低 0.1 元, 每天可多售出 10 斤.

(1) 若将苹果每斤的售价降低 x 元, 则每天的销售量是 _____ 斤 (用含 x 的代数式表示);

(2) 销售这批苹果要想每天盈利 216 元, 且保证每天至少售出 160 斤, 那么水果超市需将每斤的售价降低多少元?

(3) 当每斤苹果售价为多少元时, 才能在一天内获得最大利润? 最大利润是多少?

【答案】 (1) $(100+100x)$; (2) 0.8 元; (3) 225 元.

【解答】 解: (1) 由题意, $100 + \frac{x}{0.1} \times 10 = 100 + 100x$.

答: 每天的销售量是 $(100+100x)$ 斤.

(2) 由题意得: $(5-3-x)(100+100x) = 216$, 且 $100 + 100x \geq 160$

整理得: $x^2 - x + 0.16 = 0$, 且 $x \geq 0.6$

∴解得： $x_1 = 0.2$ (舍)， $x_2 = 0.8$.

答：超市需将每斤的售价降低 0.8 元.

(3) 由题意，结合 (2) 得，

$$\text{一天内获得利润 } w = (5 - 3 - x)(100 + 100x) = 100(2 - x)(1 + x) = -100\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 225 .$$

$$\text{且 } \begin{cases} 5 - 3 - x \geq 0 \\ 100 + 100x \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -1 \leq x \leq 2 .$$

∴当 $x = 0.5$ 时，一天内获得最大利润，最大利润为 225 元.

∴此时售价为 $5 - 0.5 = 4.5$ (元).

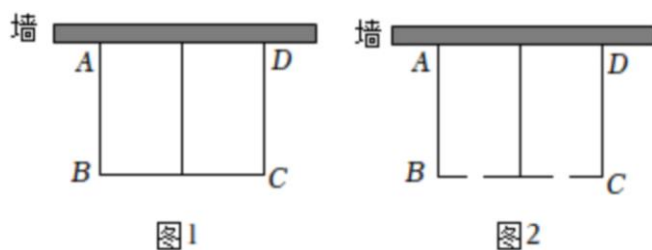
答：当每斤苹果售价为 4.5 元时，才能在一天内获得最大利润，最大利润为 225 元.

5. 如图 1，要利用一面墙（墙长为 15m）建养鸡场，用 30m 的围栏围成两个大小相同的矩形养鸡场，设养鸡场的一边 AB 长为 x m，养鸡场总面积为 y m^2 .

(1) 该养鸡场今年养鸡 320 只，计划明后两年增长率相同，预估后年养鸡 500 只，请求出这个增长率；

(2) 请问能否围成总面积为 $72m^2$ 的养鸡场，若能，请求出 AB 的长；若不能，请说明理由；

(3) 如果两个矩形养鸡场各开一个宽 1m 的门（如图 2），在不浪费围栏的情况下，求 y 与 x 的函数关系式并写出 x 的取值范围，求出养鸡场总面积最大值.



【答案】 (1) 这个增长率为 25%;

(2) $AB = 6$ 米;

(3) 养鸡场总面积最大值 $85m^2$.

【解答】 解：(1) 设这个增长率为 a ,

$$\text{由题意得： } 320(1+a)^2 = 500,$$

$$\text{解得 } a_1 = -2.25 \text{ (不合题意舍去)}, a_2 = 0.25 = 25\%,$$

答：这个增长率为 25%;

(2) 根据题意得, $x(30 - 3x) = 72$, 且 $30 - 3x \leq 15$, 即 $x \geq 5$

解得: $x_1 = 4$ (舍), $x_2 = 6$.

$\therefore AB = 6$ 米;

(3) 根据题意, 得 $y = x(30 - 3x + 2)$,

即所求的函数解析式为: $y = -3x^2 + 32x$,

$\because$ 墙长为 $15m$,

$\therefore 2 \leq BC \leq 15$,

$\therefore 2 \leq 30 - 3x + 2 \leq 15$,

解得: $\frac{17}{3} \leq x \leq 10$,

$\because a = -3 < 0$, 在对称轴直线 $x = -\frac{32}{2 \times (-3)} = \frac{16}{3}$ 右侧 y 随 x 增大而减小,

$\therefore x = \frac{17}{3}$ 时, y 的最大值为 85 ,

答: 养鸡场总面积最大值 $85m^2$.