

L9 - 基础篇第 6 讲 - 二次函数的图象和性质 (二)

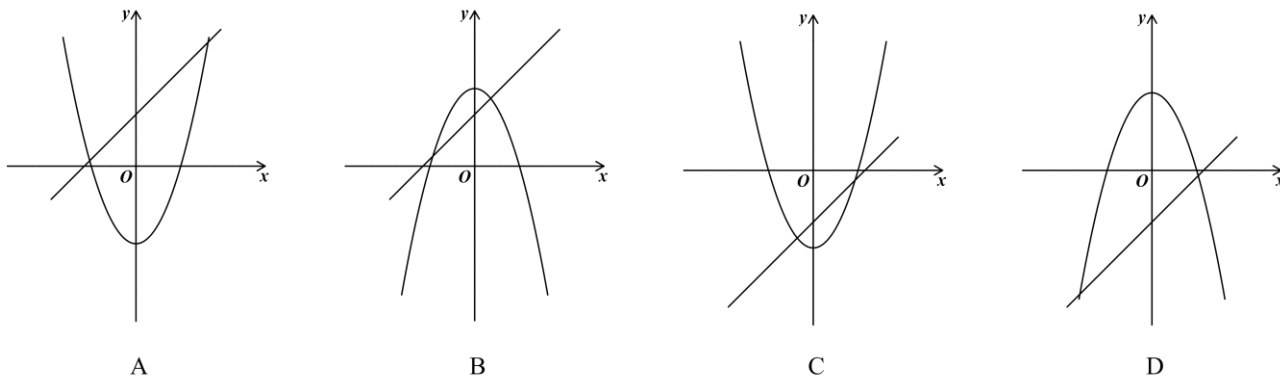
例 1: 已知点 $P(-3, y_1)$ 及点 $Q(2, y_2)$ 都在二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ 的图象上, 则 y_1 与 y_2 的大小关系是 ()

- A: $y_1 > y_2$ B: $y_1 < y_2$ C: $y_1 = y_2$ D: 无法确定

例 2: 已知抛物线 $y = ax^2 + k$ 顶点坐标为 $(0, 2)$, 且该抛物线的形状与开口方向都与抛物线 $y = 5x^2$ 相同, 求 a 与 k 的值。

例 3: 抛物线 $y = 2x^2$ 向上平移后经过点 $(1, 7)$, 求平移后的抛物线对应的二次函数的解析式。

例 4: 已知 $a \neq 0$, 同一平面直角坐标系中, 直线 $y = ax - 2a$ 与抛物线 $y = ax^2 - 3$ 的大致图象可能为 ()



例 5: 对二次函数 $y = 3(x + 2)^2 - 3$, 下列说法正确的是 ()

- A: 顶点坐标是 $(2, -3)$ B: 在 $x < 2$ 时, y 随 x 的增大而减小
C: 函数值 y 的最小值是 -3 D: 对称轴是 y 轴

例 6: 已知抛物线 $y = (x + t)^2 - a$ 的最小值是 3, 且对称轴是直线 $x = 1$ 。

(1) 指出该函数的增减性;

(2) 求 $x = 3$ 时的函数值。

例 7: 抛物线 $y = -4(x - 1)^2 + 3$ 可由抛物线 $y = -4x^2$ ()

- A: 先向上平移 3 个单位, 再向左平移 1 个单位得到
B: 先向下平移 3 个单位, 再向左平移 1 个单位得到
C: 先向上平移 3 个单位, 再向右平移 1 个单位得到
D: 先向下平移 3 个单位, 再向右平移 1 个单位得到

例 8: 已知抛物线 $y = -2(x + 3)^2 + 15$ 过点 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + 6, y_0)$,求 x_0 的值。

例 9: 已知点 $A(a, 4), B(b, 4), C(c, 21)$ 都在抛物线 $y = (u^2 + 1)(x - 2)^2 + v$ 上, 其中 u, v 是常数。若点 A 在 y 轴的左侧, 则 ()

A: 若 $c < 0$, 则 $a < b < c$

B: 若 $c < 0$, 则 $a < c < b$

C: 若 $c > 0$, 则 $a < b < c$

D: 若 $c > 0$, 则 $a < c < b$

L9 - 基础篇第 7 讲 - 二次函数的图象和性质（三）

例 1：指出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标。

(1) $y = 3x^2 + x - 1$;

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$ 。

例 2：已知二次函数 $y = x^2 - 6x + 7$ ，点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是函数图象上两点，则（ ）

A: y 的最大值为 -2

B: 该抛物线与 y 轴交于点 $(0, -2)$

C: 若 $x_1 > x_2 > 0$ ，则 $y_1 < y_2$

D: 若 $x_1 < x_2 < 0$ ，则 $y_1 > y_2$

例 3：已知二次函数 $y = (t + 1)x^2 + 2(t + 2)x + 2024$ 在 $x = -5$ 和 $x = 7$ 时的函数值相等，求 t 的值。

例 4：若抛物线 $y = x^2 - 6x + m$ 上有且仅有三点到 x 轴的距离为 2，求实数 m 的值。

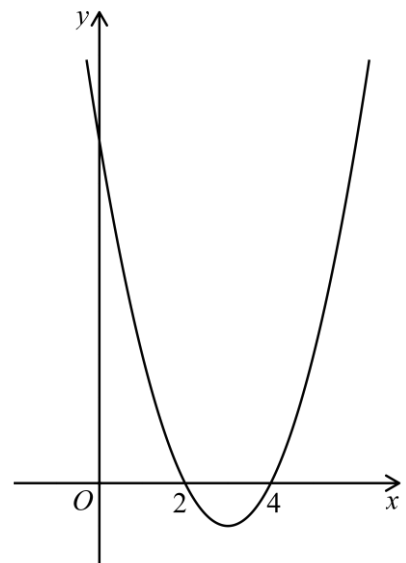
例 5：已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在平面直角坐标系中的图象如下，则（ ）

A: $ac < 0$

B: $ab > 0$

C: $6a + b = 1$

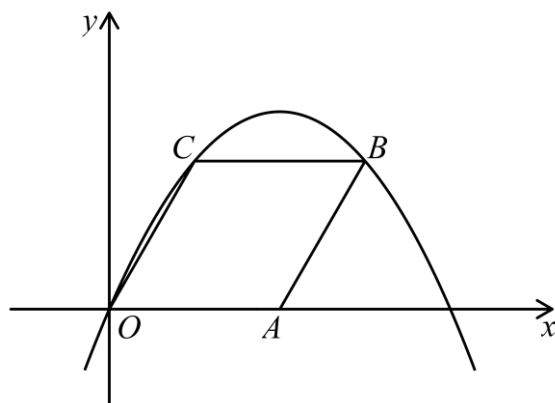
D: 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是图象上两点，且 $x_1 < 0 < x_2 < 6$ ，则 $y_1 > y_2$ 。



例 6: 根据条件, 求二次函数的解析式。

- (1) 二次函数的图象经过 $(1,4)$, $(2,9)$, $(-1,6)$ 三点;
- (2) 二次函数的图象的顶点为 $(1,2)$, 且经过点 $(2,5)$;
- (3) 二次函数的图象与 x 轴交于 $(-2,0)$ 和 $(4,0)$ 两点, 且经过点 $(2,4)$;
- (4) 二次函数最大值为 4, 图象与 x 轴两交点的距离是 8, 对称轴是直线 $x = -3$ 。

例 7: 如图, 平面直角坐标系中, $OABC$ 是菱形, $\angle AOC = 60^\circ$, $A(2\sqrt{3}, 0)$, 点 O, B, C 三点都在抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上, 求抛物线的解析式。



L9 - 基础篇第 8 讲 - 二次函数的最值问题

例 1: 已知二次函数 $y = -(x - 1)^2 + 2$,

- (1) 当 $2 \leq x \leq 4$ 时, 求函数的最大值和最小值;
- (2) 当 $-5 \leq x \leq 0$ 时, 求函数的最大值和最小值;
- (3) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 求函数的最大值和最小值。

例 2: 已知二次函数 $y = x^2 - 4x + 2$, t 是一个正常数。

- (1) 当 $0 \leq x \leq t$ 时, 函数的最小值是 -2 , 求 t 的取值范围;
- (2) 当 $0 \leq x \leq t$ 时, 函数的最大值是 2 , 求 t 的取值范围。

例 3: 已知二次函数 $y = ax^2 + 2ax + 1$, 其中 a 是非零常数。当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, 求函数的最大值和最小值 (用 a 表示)。

例 4: 已知二次函数 $y = (x - a)^2 + 3$, 其中 a 是常数。当 $-2 \leq x \leq 2$ 时,

- (1) 求函数的最大值 (用 a 表示);
- (2) 求函数的最小值 (用 a 表示)。

L9 - 基础篇第 9 讲 - 二次函数与一元二次方程

例 1: 二次函数 $y = 3x^2 + 5x - 12$ 的图象与 x 轴的交点个数为 ()

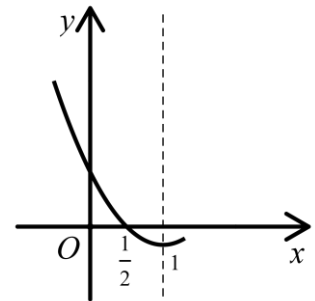
A: 0 个 B: 1 个 C: 2 个 D: 3 个

例 2: 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = kx + m$ 交于两点 $A(-1,2)$ 和 $B(3,4)$, 求关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = kx + m$ 的解。

例 3: $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示,

(1) 求关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解;

(2) 求关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集。



例 4: 二次函数的图象与 x 轴交于 $(-2,0)$ 和 $(4,0)$ 两点, 且经过点 $(2,4)$, 求该二次函数的解析式。

例 5: 已知函数 $y = (a - 2)x^2 + (2a + 1)x + a + 2$ 的图象与 x 轴有交点, 求实数 a 的取值范围。

例 6: 已知抛物线 $y = x^2 + 2ax + a^2 + a + 1$ 与 x 轴交于不同的两点, 且当 $x > 2$ 时, y 随 x 的增大而增大, 求实数 a 的取值范围。

例 7: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $(1,0)$ 和 $(3,0)$ ，且经过点 $(5,16)$ ，又已知关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = m$ 在 $-4 < x < 4$ 的范围内有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围。

例 8: 根据下列表格中二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值，可判断关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个解 x 的范围是 ()

x	-2	-1	0	1	2
y	7	2	-1	-2	-1

A: $-2 < x < -1$ B: $-1 < x < 0$ C: $0 < x < 1$ D: $1 < x < 2$

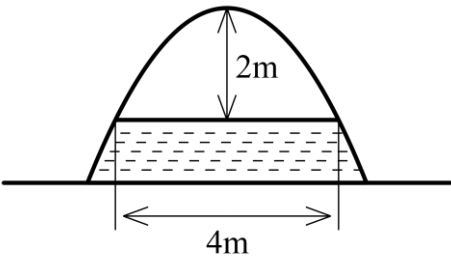
例 9: 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表，又已知 $f < 0$ ，则可判断关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个解 x 的范围是 ()

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
y	d	e	f	2	2	g	h

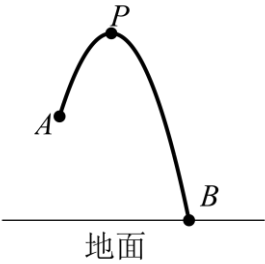
A: $-2 < x < -1$ B: $-1 < x < -\frac{1}{2}$ C: $0 < x < 1$ D: $1 < x < 2$

L9 - 基础篇第 10 讲 - 实际问题与二次函数

例 1：一座抛物线型拱桥如图所示，桥下水面宽度是 4m 时，拱顶距离水面是 2m。当水面下降 1m 后，求水面宽度。

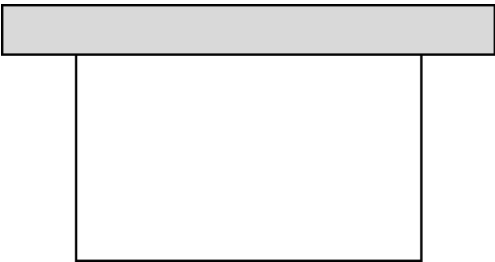


例 2：如图所示，某人投篮后篮球的轨迹是一条抛物线。已知篮球脱手处点A距地面 2 米，轨迹的最高点P距离运动员的水平距离为 1 米，篮球落地点为B，B距离运动员的水平距离为 2.5 米。求P点到地面的距离。（假设运动员投篮后站在原地没有移动）



例 3：如图，用一段长为 30 米的篱笆围成一个靠墙的矩形菜园，

- (1) 求菜园面积的最大值；
- (2) 若墙的长度为 10 米，求菜园面积的最大值。



例 4: 某种钢笔进价 20 元/支, 调研发现, 销售单价为 25 元/支时, 每天可销售 250 支。售价每上涨 1 元, 每天销售量会减少 10 支。

- (1) 求每天销售利润 y (元) 关于销售单价 x (元) 的函数关系式;
- (2) 销售单价为多少时, 每天的销售利润最大? 最大值为多少?
- (3) 现有 A, B 两种方案, 方案 A: 销售单价高于进价且不超过 30 元; 方案 B: 每天销量不少于 10 支, 每支利润不少于 25 元。哪种方案的最大利润更高?