

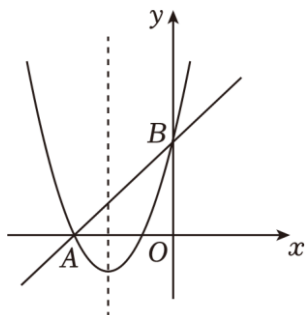
习题 L9-11：抛物线背景下的图形问题

参考答案与试题解析

1. 已知直线 $y=x+3$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 A 、 B 两点，点 M 在线段 OA 上，从 O 点出发，向点 A 以每秒 1 个单位的速度匀速运动；同时点 N 在线段 AB 上，从点 A 出发，向点 B 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位的速度匀速运动，连接 MN ，设运动时间为 t 秒.

(1) 求抛物线关系式；

(2) 当 t 为何值时， $\triangle AMN$ 为直角三角形.



【解答】解：(1) $\because$ 直线 $y=x+3$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ ，点 B 的坐标为 $(0, 3)$.

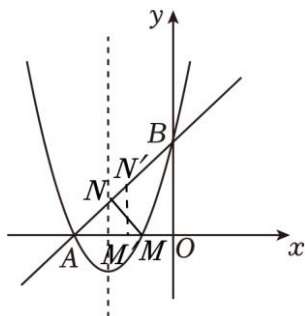
将 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 代入 $y=x^2+bx+c$ ，得：

$$\begin{cases} 9-3b+c=0, \\ c=3 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b=4, \\ c=3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=x^2+4x+3$ ；

(2)



当运动时间为 t 秒时，点 M 的坐标为 $(-t, 0)$ ，点 N 的坐标为 $(t-3, t)$ ，

$\therefore AM=3-t$ ， $AN=\sqrt{2}t$.

$\because \triangle AMN$ 为直角三角形, $\angle MAN = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AMN$ 为等腰直角三角形, 如图,

当 $\angle ANM = 90^\circ$ 时, 有 $AM = \sqrt{2}AN$, 即 $3 - t = 2t$,

解得: $t = 1$;

当 $\angle AMN = 90^\circ$ 时, 有 $t - 3 = -t$,

解得: $t = \frac{3}{2}$.

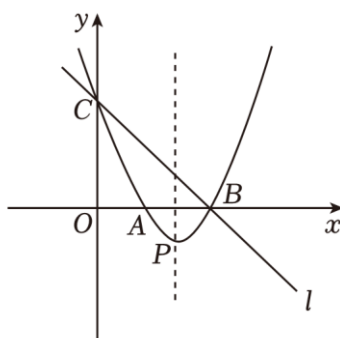
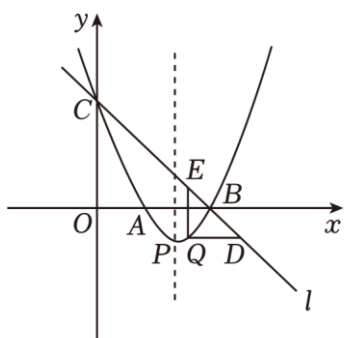
综上所述: 当 t 为 1 秒或 $\frac{3}{2}$ 秒时, $\triangle AMN$ 为直角三角形.

2. 如图, 直线 $l: y = -x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 B 、 C , 经过 B 、 C 两点的抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴的另一个交点为 A , 顶点为 P .

(1) 求该抛物线的解析式;

(2) 若点 Q 在直线 l 下方的抛物线上时, 过点 Q 作 $QD \parallel x$ 轴交 l 于点 D , $QE \parallel y$ 轴交 l 于点 E , 求 $QD + QE$ 的最大值;

(3) 在该抛物线的对称轴上是否存在点 M , 使以 C 、 P 、 M 为顶点的三角形为等腰三角形? 若存在, 请求出所有符合条件的点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



备用图

【解答】 解: (1) $y = -x + 3$, 令 $y = 0$, 则 $x = 3$, 令 $x = 0$, 则 $y = 3$,

$\therefore$ 点 B 、 C 的坐标为 $(3, 0)$ 、 $(0, 3)$,

将点 B 、 C 的坐标代入 $y = x^2 + bx + c$ 得:

$$\begin{cases} 0 = 3^2 + 3b + c, \\ 3 = 0 + 0 + c \end{cases}$$

解得: $b = -4$, $c = 3$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为: $y = x^2 - 4x + 3$;

(2) 设 $Q(m, m^2 - 4m + 3)$,

$\because QD \parallel x$ 轴交 l 于点 D , $QE \parallel y$ 轴交 l 于点 E , 点 D, E 都在直线 $y = -x+3$ 上,

$$\therefore E(m, -m+3), D(-m^2+4m, m^2-4m+3),$$

$$\begin{aligned}\therefore QD+QE &= -m^2+4m - m + [(-m+3) - (m^2-4m+3)] \\ &= -2m^2+6m\end{aligned}$$

$$= -2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2},$$

$\therefore$ 当 $m = \frac{3}{2}$ 时, $PD+PE$ 的最大值是 $\frac{9}{2}$;

(3) 在该抛物线的对称轴上存在点 M , 使以 C, P, M 为顶点的三角形为等腰三角形, 理由如下:

点 $C(0, 3)$ 、点 $P(2, -1)$,

设点 $M(2, m)$,

$$CP^2 = 4+16=20,$$

$$CM^2 = 4+(m-3)^2 = m^2-6m+13,$$

$$PM^2 = m^2+2m+1,$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } CM=CP \text{ 时, } 20=m^2-6m+13,$$

解得: $m=7$ 或 -1 (不合题意, 舍去);

$$\textcircled{2} \text{ 当 } CP=PM \text{ 时, 同理可得: } m=-1 \pm 2\sqrt{5};$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } CM=PM \text{ 时, 同理可得: } m=\frac{3}{2};$$

故点 M 坐标为: $(2, 7)$ 或 $(2, -1+2\sqrt{5})$ 或 $(2, -1-2\sqrt{5})$ 或 $(2, \frac{3}{2})$.

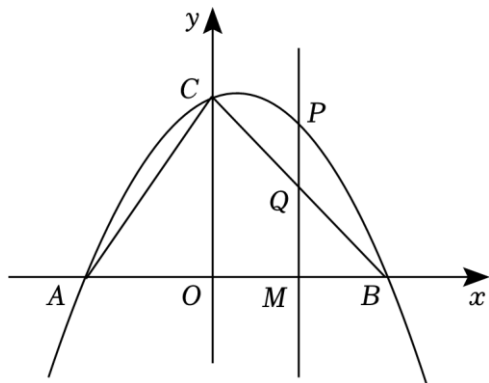
3. 抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-3, 0)$, $B(4, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C , 连接 AC, BC . M 为线段 OB 上的一个动点, 过点 M 作 $PM \perp x$ 轴, 交抛物线于点 P , 交 BC 于点 Q .

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 设 M 点的坐标为 $M(m, 0)$, 请用含 m 的代数式表示线段 PQ 的长, 并求出当 m 为何值时, PQ 有最大值, 最大值是多少?

(3) 试探究点 M 在运动过程中, 是否存在这样的点 Q , 使得以 A, C, Q 为顶点的三角形是等腰三角形, 若存在, 请直接写出此时点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(4) 在(2)的条件下, 直线 PM 上有一动点 R , 连接 RO , 将线段 RO 绕点 R 逆时针旋转 90° , 使点 O 的对应点 T 恰好落在该抛物线上, 直接写出点 R 的坐标.



【解答】解：(1) 将 $A(-3, 0)$, $B(4, 0)$ 代入 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 得：

$$\begin{cases} -3 - 3b + c = 0 \\ -\frac{16}{3} + 4b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = \frac{1}{3}, \\ c = 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式： $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$;

(2) 令 $x=0$, 则 $y=4$,

$\therefore C(0, 4)$,

设直线 BC 的解析式为： $y=kx+n$,

将 $C(0, 4)$ 、 $B(4, 0)$ 代入，

$$\text{则} \begin{cases} 4k + n = 0 \\ n = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ n = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为： $y = -x + 4$,

$\therefore M$ 点的坐标为 $M(m, 0)$,

$\therefore Q(m, -m+4)$, $P(m, -\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4)$,

$\therefore PQ = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4 + m - 4 = -\frac{1}{3}(m-2)^2 + \frac{4}{3}$,

$\therefore M$ 在 OB 上，

$\therefore 0 \leq m \leq 4$,

$\therefore$ 当 $m=2$ 时， PQ 有最大值，最大值为 $\frac{4}{3}$;

(3) 存在点 Q ，使得以 A, C, Q 为顶点的三角形是等腰三角形，

理由：设 $Q(t, -t+4)$ ($0 < t \leq 4$)，

$$\therefore AC=5, AQ=\sqrt{2t^2-2t+25}, CQ=\sqrt{2}|t|,$$

$$\text{当 } AC=AQ \text{ 时, } \sqrt{2t^2-2t+25}=5,$$

$$\text{解得 } t=0 \text{ (舍)} \text{ 或 } t=1,$$

$$\therefore Q(1, 3);$$

$$\text{当 } AC=CQ \text{ 时, } \sqrt{2}|t|=5,$$

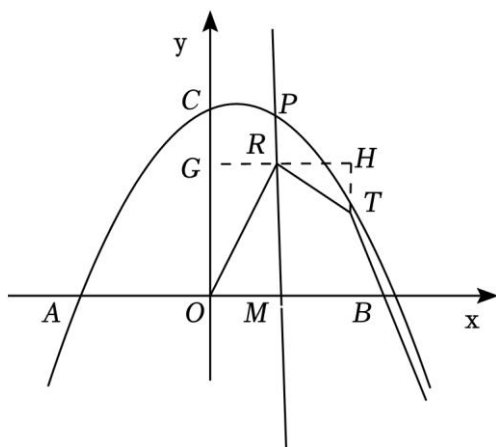
$$\text{解得 } t=\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } t=-\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (舍)}, Q(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 4-\frac{5\sqrt{2}}{2}),$$

$$\text{当 } AQ=CQ \text{ 时, } \sqrt{2t^2-2t+25}=\sqrt{2}|t|,$$

$$\text{解得 } t=\frac{25}{2} \text{ (舍)};$$

综上所述： Q 点坐标为 $(1, 3)$ 或 $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 4-\frac{5\sqrt{2}}{2})$;

(4)



如图 1，过点 R 作 $GH \perp y$ 轴交于点 G ，过点 T 作 $TH \perp GH$ 交于点 H ，

$$\text{则 } \angle OGR = \angle RHT = 90^\circ,$$

$$\because \angle ORT = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GRO + \angle HRT = 90^\circ,$$

$$\because \angle GRO + \angle ROG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HRT = \angle ROG,$$

$$\because RO = RT,$$

$$\therefore \triangle GRO \cong \triangle HTR \text{ (AAS)},$$

$$\therefore RG = HT, GO = RH,$$

设 $R(2, n)$,

$$\therefore HT=RG=2, \quad GO=RH=n,$$

$$\therefore T(2+n, n-2),$$

$\because T$ 点在抛物线上,

$$\therefore n-2 = -\frac{1}{3}(n+2)^2 + \frac{1}{3}(n+2) + 4,$$

解得 $n=2$ 或 $n=-8$,

$$\therefore R(2, 2) \text{ 或 } (2, -8).$$

习题 L9-12：图形的旋转

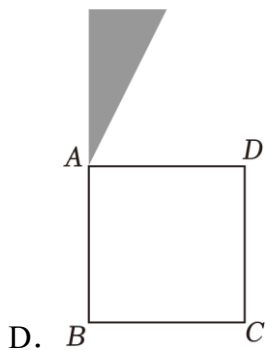
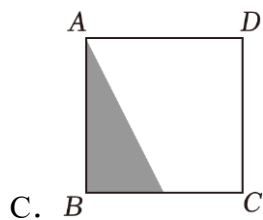
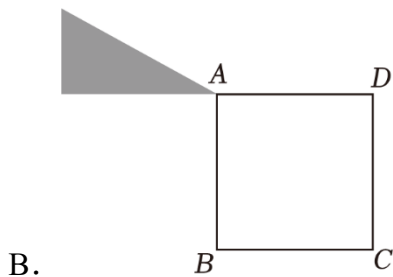
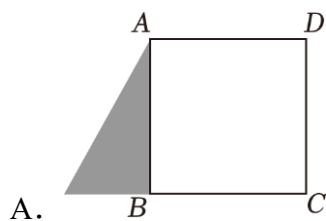
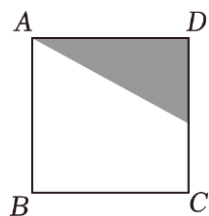
参考答案与试题解析

1. 下面生活中的实例，不是旋转的是()

- A. 传送带传送货物
- B. 螺旋桨的运动
- C. 风车风轮的运动
- D. 自行车车轮的运动

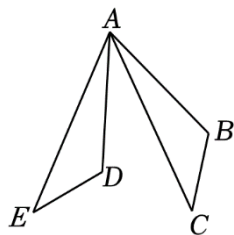
【答案】 A

2. 将图正方形 $ABCD$ 中的阴影三角形绕点 A 逆时针转 90° 后，得到的图形为()



【答案】 D

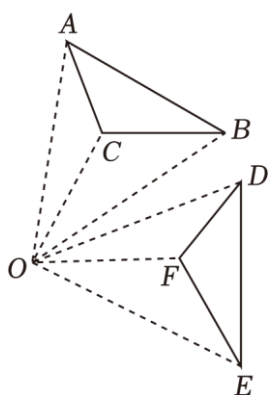
3. 如图， $\triangle ADE$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转锐角 α 得到，下列各角中，是旋转角的是()



- A. $\angle BAD$ B. $\angle BAE$ C. $\angle DAE$ D. $\angle CAD$

【答案】 A

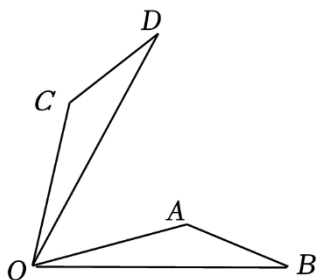
4. 如图， $\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕着点 O 顺时针旋转得到的，以下说法不一定正确的是()



- A. $\angle COF = \angle BOE$ B. $\angle OAC = \angle ODF$ C. $OC = OF$ D. $BC = DF$

【答案】 D

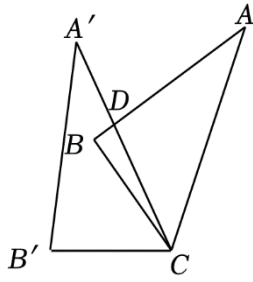
5. 如图， $\triangle OAB$ 绕点 O 逆时针旋转 70° ，得到 $\triangle OCD$ ，若 $\angle AOB = 15^\circ$ ，则 $\angle AOD$ 等于()



- A. 85° B. 70° C. 55° D. 45°

【答案】 C

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 70^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 55° 得到 $\triangle A'B'C'$ ，且 $AB \perp A'C$ 于点 D ，求 $\angle A'CB'$ 的度数()

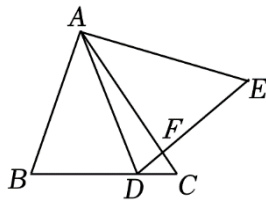


- A. 70° B. 75° C. 65° D. 55°

【答案】 B

【分析】 由 $AB \perp A'C$ 于点 D ，得 $\angle BDC = 90^\circ$ ，因为 $\angle B = 70^\circ$ ，所以 $\angle BCD = 90^\circ - \angle B = 20^\circ$ ，由旋转得 $\angle BCB' = 55^\circ$ ，则 $\angle A'CB' = \angle BCB' + \angle BCD = 75^\circ$ 。

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 50^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 逆时针旋转 α ($0 < \alpha < 50^\circ$)，得到 $\triangle ADE$ ， DE 交 AC 于点 F 。当 $\alpha = 40^\circ$ 时，点 D 恰好落在 BC 上，此时 $\angle AFE$ 等于()



- A. 75° B. 80° C. 85° D. 90°

【答案】 B

【分析】 由旋转的性质，可知 $AB = AD$ ， $\angle B = \angle ADE$ ，

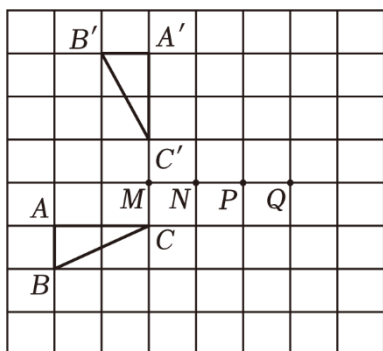
$$\therefore \angle BAD = \alpha = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADB = \angle ADE = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC - \angle BAD = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DAC + \angle ADE = 80^\circ.$$

8. 如图，正方形网格中的每个小正方形的边长为 1，将 $\triangle ABC$ 绕旋转中心旋转某个角度后得到 $\triangle A'B'C'$ ，其中点 A ， B ， C 的对应点是点 A' ， B' ， C' ，那么旋转中心是()



A. 点 Q

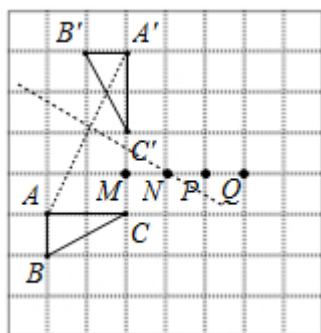
B. 点 P

C. 点 N

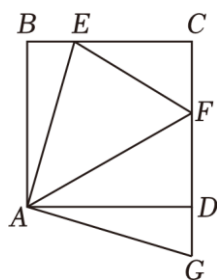
D. 点 M

【答案】 C

【分析】 作 AA' 、 CC' 的垂直平分线，它们的交点为 N 点.



9. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4， $\angle EAF = 45^\circ$ ，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 90° 得到 $\triangle ADG$ ．若 $BE = 1$ ，则 DF 的长为()



A. 3

B. $\sqrt{7}$

C. $\frac{12}{5}$

D. 4

【答案】 C

【分析】 易证 $\triangle EAF \cong \triangle GAF$

$\triangle EAF$ 和 $\triangle GAF$ 中，

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle GAF = \angle EAF = 45^\circ, \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle GAF(SAS),$$

$$\therefore EF = GF.$$

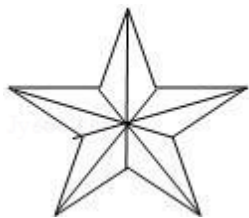
$$\text{令 } DF = x,$$

$$\text{则 } CF = 4 - x, \quad EF = GF = x + 1, \quad CE = 4 - 1 = 3.$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEF \text{ 中, } (x+1)^2 = (4-x)^2 + 3^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{12}{5}, \text{ 即 } DF = \frac{12}{5}.$$

10. 五角星可以看成由一个四边形旋转若干次而生成的, 则每次旋转的度数可以是()



A. 36°

B. 60°

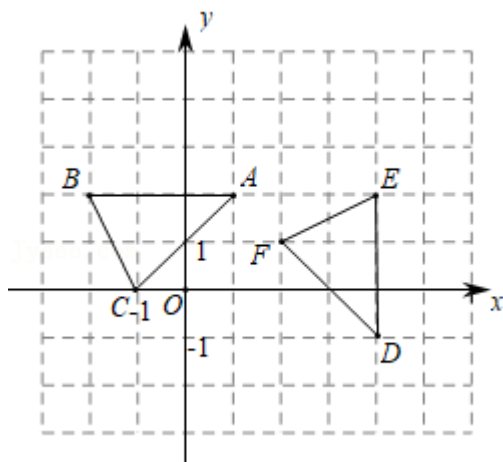
C. 72°

D. 90°

【答案】 C

【分析】 $360^\circ \div 5 = 72^\circ$ 或 72° 的倍数.

11. 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 顶点的横、纵坐标都是整数. 若将 $\triangle ABC$ 以某点为旋转中心, 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle DEF$, 其中 A 、 B 、 C 分别和 D 、 E 、 F 对应, 则旋转中心的坐标是()



A. $A(0,0)$

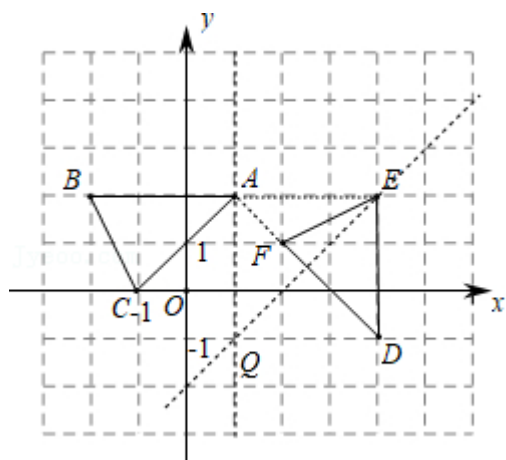
B. $(1,0)$

C. $(1,-1)$

D. $(0.5,0.5)$

【答案】 C

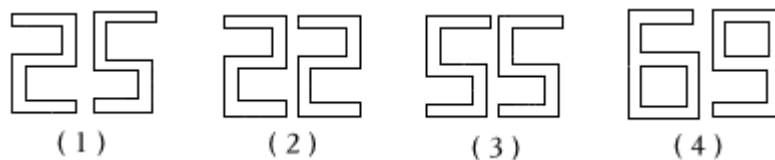
【分析】如图，点Q即为所求， $Q(1,-1)$.



习题 L9-13：中心对称

参考答案与试题解析

1. 下列四组图形中，左边的图形与右边的图形成中心对称的有()



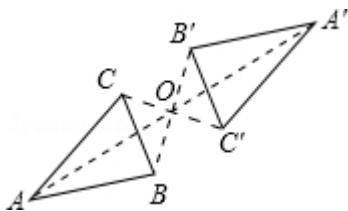
- A. 1 组 B. 2 组 C. 3 组 D. 4 组

【答案】 C

【分析】 ②③④都是中心对称.

故选： C .

2. 如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于 O 成中心对称，下列结论中不成立的是()



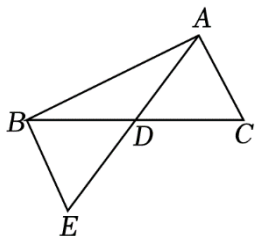
- A. $OC = OC'$ B. $OA = OA'$
C. $BC = B'C'$ D. $\angle ABC = \angle A'C'B'$

【答案】 D

3. 如图， D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 的中点，连接 AD 并延长到点 E ，使 $DE = AD$ ，连接 BE .

(1) $\triangle ADC$ 和 _____ 成中心对称；

(2) 已知 $\triangle ADC$ 的面积为 4，则 $\triangle ABE$ 的面积是 ____.



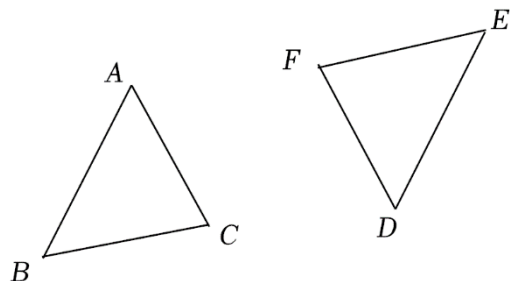
【答案】 (1) $\triangle EDB$ ；(2) 8.

【分析】 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 的中点， $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = 4$ (等底同高)，又 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 成中心对称，故 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle EDB} = 4$ ，则 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle EDB} = 8$

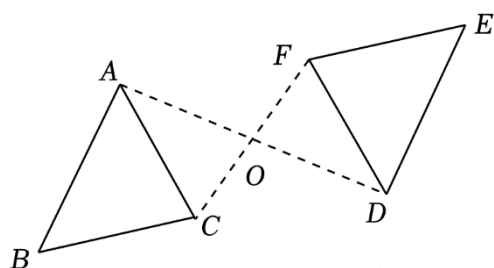
4. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 关于点 O 成中心对称.

(1) 找出它们的对称中心 O ；

(2) 若 $AB=6$ ， $AC=5$ ， $BC=4$ ，求 $\triangle DEF$ 的周长.



【解答】解：(1) 如图所示，点 O 即为所求；



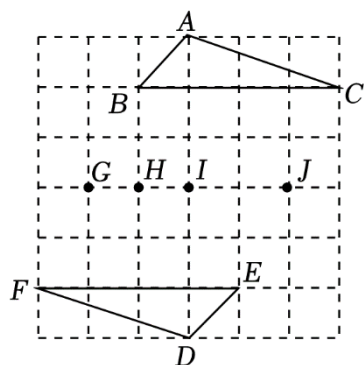
(2) $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 关于点 O 成中心对称，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，

$\therefore AB=DE=6$ ， $AC=DF=5$ ， $BC=EF=4$ ，

$\therefore \triangle DEF$ 的周长 $= DE + DF + EF = 6 + 5 + 4 = 15$ ；

5. 如图，在正方形网格中， A ， B ， C ， D ， E ， F ， G ， H ， I ， J 是网格线交点， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 关于某点成中心对称，则其对称中心是()



A. 点 G

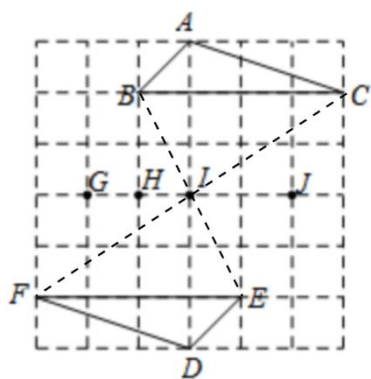
B. 点 H

C. 点 I

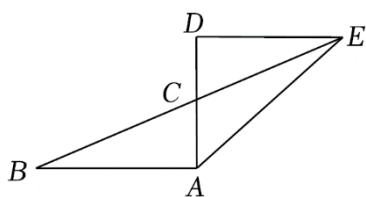
D. 点 J

【答案】 C

【分析】



6. 如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 关于点 C 成中心对称， $AB = \sqrt{5}$ ， $AE = 3$ ， $\angle D = 90^\circ$ ，则 $AC =$ _____.



【答案】1.

【分析】 $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 关于点 C 成中心对称，

$$\therefore AC = CD, \quad DE = AB = \sqrt{5},$$

$$\because AE = 3, \quad \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{9 - 5} = 2,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AD = 1.$$

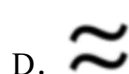
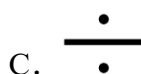
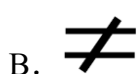
7. 剪纸艺术是最古老的中国民间艺术之一，先后入选中国国家级非物质文化遗产名录和人类非物质文化遗产代表作名录．鱼与“余”同音，寓意生活富裕、年年有余，是剪纸艺术中很受喜爱的主题．以下关于鱼的剪纸中，是轴对称图形但不是中心对称图形的是()





【答案】D

8. 下列符号中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是()

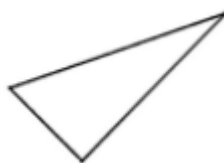


【答案】C

9. 数学家是对世界数学的发展作出创造性工作的人士，他们运用他们的特殊知识与专业方法解决许多在科学领域的显著问题。下面的图形是用数学家名字命名的，其中是中心对称形的是()



斐波那契螺旋线



阿基米德三角形



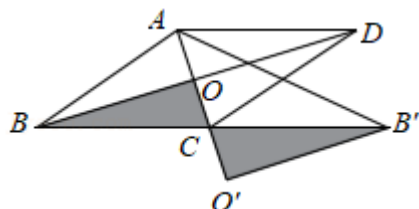
赵爽弦图



笛卡尔心形线

【答案】C

10. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $AC=4$ ， $BD=16$ ，将 $\triangle BOC$ 绕着点 C 旋转 180° 得到 $\triangle B'O'C$ ，则点 A 与点 B' 之间的距离为()



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】C

【分析】 $\because$ 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $AC=4$ ， $BD=16$ ，

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BOC$ 绕着点 C 旋转 180° 得到 $\triangle B'O'C$,

$$\therefore \angle CO'B' = \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore O'C = OC = OA = \frac{1}{2}AC = 2,$$

$$\therefore AO' = 6,$$

$$\therefore OB = OD = O'B' = \frac{1}{2}BD = 8,$$

在 $Rt \triangle AO'B'$ 中, 根据勾股定理, 得

$$AB' = \sqrt{AO'^2 + O'B'^2} = 10.$$

则点 A 与点 B' 之间的距离为 10.

11. 已知点 $P(m, 1)$ 与点 $Q(3, n)$ 关于原点对称, 则 $m+n$ 的值为 ()

A. 2

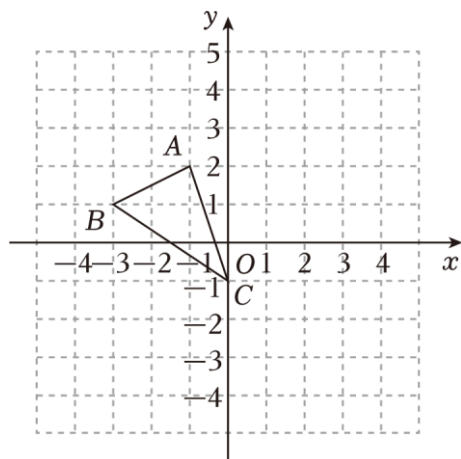
B. -2

C. -4

D. 4

【答案】 C

12. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 180° 后得到 $\triangle A'B'C$, 则点 A 的对应点 A' 的坐标为 ()



A. (1, -2)

B. (-1, -2)

C. (-1, 2)

D. (1, -4)

【答案】 D

【分析】 因为 $\triangle A'B'C$ 由 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 180° 得到, 所以点 A 和点 A' 关于点 C 对称. 又因为点 C 坐标为 $(0, -1)$, 所以 $\frac{x_A + x_{A'}}{2} = 0$, $\frac{y_A + y_{A'}}{2} = -1$. 又因为点 A 坐标为 $(-1, 2)$, 所以点 A' 的坐标为 $(1, -4)$.

习题 L9-14: 圆的有关性质 (一)

参考答案与试题解析

1. 到 O 点距离为 2 的点的集合是_____.

【答案】以点 O 为圆心, 以 2 为半径的圆.

2. 下列说法错误的是()

A. 半圆是弧

B. 圆中最长的弦是直径

C. 半径不是弦

D. 能够重合的弧是等弧

【答案】D

【分析】在同圆或等圆中, 能够完全重合的弧是等弧.

3. 下列说法: (1) 长度相等的弧是等弧, (2) 相等的圆心角所对的弧相等, (3) 劣弧一定比优弧短, (4) 直径是圆中最长的弦. 其中正确的有()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】A

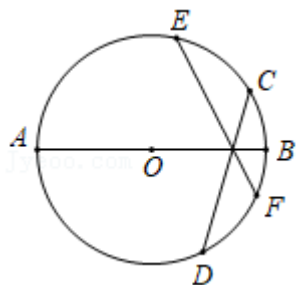
【分析】(1) 长度相等的弧不一定是等弧, 弧的度数必须相同, 故错误;

(2) 同圆或等圆中相等的圆心角所对的弧相等, 故错误;

(3) 同圆或等圆中劣弧一定比优弧短, 故错误;

(4) 正确,

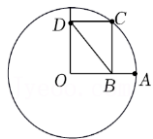
4. 如图, _____是直径, _____是弦, 以 E 为端点的劣弧有_____, 以 A 为端点的优弧有_____.



【答案】 AB ; CD 、 EF 、 AB , AE 、 EB 、 EF 、 ED 、 EC , ADC 、 ADE 、 ABF 、 ABD .

5. 如图, OA 是 $\odot O$ 的半径, B 为 OA 上一点 (且不与点 O 、 A 重合), 过点 B 作 OA 的垂线交 $\odot O$ 于点 C . 以 OB 、 BC 为边作矩形 $OBCD$, 连结 BD . 若 $CD = 6$,

$BC=8$ ，则 AB 的长为()



A. 6

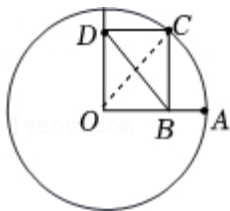
B. 5

C. 4

D. 2

【答案】 C

【分析】 如图，连接 OC .



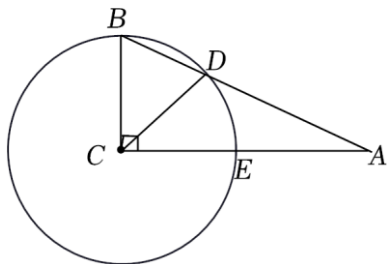
$\because$ 四边形 $OBCD$ 是矩形，

$\therefore \angle OBC = 90^\circ$ ， $OB = CD = 6$ ，

$\therefore OC = OA = \sqrt{BC^2 + OB^2} = 10$ ，

$\therefore AB = OA - OB = 4$.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以点 C 为圆心， BC 为半径的圆交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E . 若 $\angle A = 25^\circ$ ，求 $\angle DCE$ 的度数.



【答案】 40° .

【分析】 $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 65^\circ$ ，

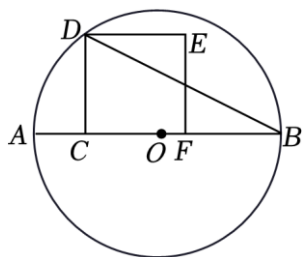
$\because CB = CD$ ，

$\therefore \angle CDB = \angle B = 65^\circ$ ，

$\because \angle CDB = \angle DCE + \angle A$ ，

$\therefore \angle DCE = 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ$.

7. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 为直径， $CD \perp AB$ 于 C ，四边形 $CDEF$ 是正方形，连接 BD ，若 $CO = 3$ ， $OF = 1$ ，则 $BD = (\quad)$



A. $3\sqrt{5}$

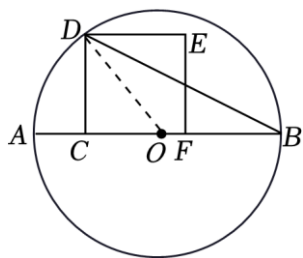
B. $4\sqrt{5}$

C. 13

D. $2\sqrt{10}$

【答案】 B

【分析】



连接 DO .

$$\because CO = 3, OF = 1,$$

$$\therefore CF = 4,$$

$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形，

$$\therefore \angle DCO = 90^\circ, CD = CF = 4,$$

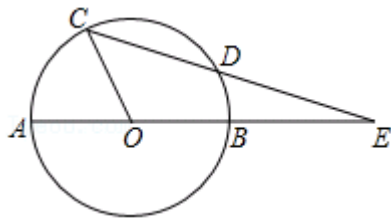
$$\therefore OD = \sqrt{CD^2 + CO^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\therefore OB = OD = 5,$$

$$\therefore CB = CO + OB = 8,$$

$$\therefore BD = \sqrt{CD^2 + CB^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

8. 如图， $\odot O$ 的直径 AB 与弦 CD 的延长线交于点 E ，若 $OB = DE$ ， $\angle E = 26^\circ$ ，则 $\angle AOC$ 是()



A. 52°

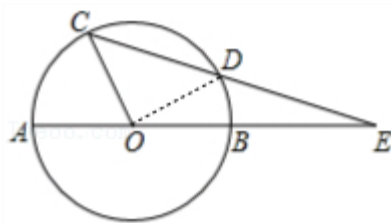
B. 62°

C. 72°

D. 78°

【答案】 D

【分析】



连接 OD ，如图，

$$\because OD = OB = DE,$$

$$\therefore \angle DOE = \angle E = 26^\circ,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle DOE + \angle E = 26^\circ + 26^\circ = 52^\circ,$$

$$\because OC = OD,$$

$$\therefore \angle C = \angle ODC = 52^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle C + \angle E = 52^\circ + 26^\circ = 78^\circ.$$

9. 下列语句中不正确的有()

①长度相等的弧是等弧；

②垂直于弦的直径平分弦；

③圆是轴对称图形，任何一条直径都是它的对称轴；

④平分弦的直径也必平分弦所对的两条弧；

⑤弦所对的两条弧的中点连线垂直平分弦且过圆心.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

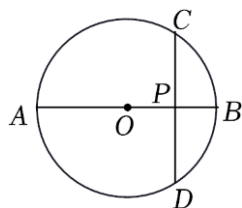
【答案】 C

【分析】 ① $\because$ 在同圆或等圆中，能够完全重合的弧是等弧， $\therefore$ ①不正确；

③ $\because$ 圆是轴对称图形，任何一条直径所在的直线都是它的对称轴， $\therefore$ ③不正确；

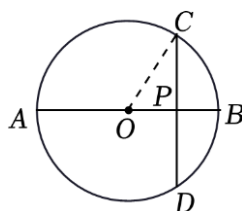
④ $\because$ 平分弦（不是直径）的直径也必平分弦所对的两条弧， $\therefore$ ④不正确

10. 如图， $\odot O$ 的直径 $AB=10$ ， CD 是 $\odot O$ 的弦， $CD \perp AB$ 于点 P ，且 $BP=2$ ，则 CD 的长是_____.



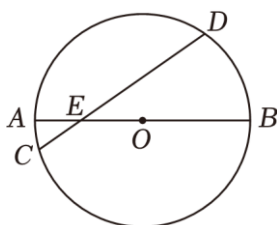
【答案】8.

【分析】



连接 OC ，由垂径定理推出 $CD=2PC$ ，求出 $OP=5-2=3$ ，由勾股定理求出 $PC=\sqrt{OC^2-OP^2}=4$ ，即可得到 $CD=2PC=8$ 。

11. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 CD 交 AB 于点 E ， $AE=2$ ， $BE=10$ ， $\angle AEC=30^\circ$ ，则 CD 的长为()



A. $8\sqrt{2}$

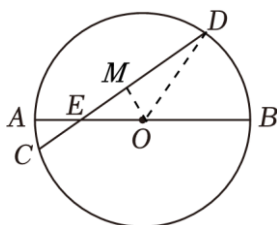
B. 8

C. $6\sqrt{2}$

D. 10

【答案】A

【分析】



过点 O 作 $OM \perp CD$ 于点 M ，连接 OD ，

$\because AE=2$ ， $BE=10$ ，

$\therefore AB=2+10=12$ ，

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore OA = OB = OD = 6$,

$\therefore OE = OA - AE = 6 - 2 = 4$,

$\therefore \angle AEC = 30^\circ$,

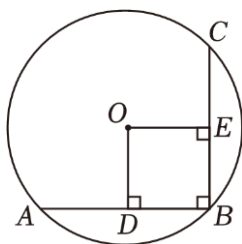
$\therefore \angle OEM = 30^\circ$,

$\therefore OM = \frac{1}{2}OE = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle ODM$ 中, $DM = \sqrt{OD^2 - OM^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$,

$\therefore CD = 2DM = 8\sqrt{2}$.

12. 如图, 在 $\odot O$ 中, AB , BC 为互相垂直且相等的两条弦, $OD \perp AB$, $OE \perp BC$, 垂足分别为 D , E , 求证: 四边形 $ODBE$ 是正方形.



【解答】 证明: $\because OD \perp AB$ 于 D , $OE \perp BC$ 于 E , $AB \perp BC$,

$\therefore BD = \frac{1}{2}AB$, $BE = \frac{1}{2}BC$, $\angle BDO = \angle B = \angle OEB = 90^\circ$,

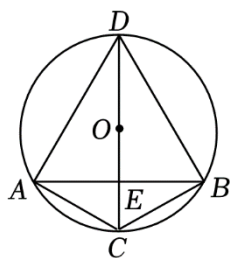
$\therefore$ 四边形 $ODBE$ 是矩形,

$\because AB = BC$,

$\therefore BD = BE$,

$\therefore$ 四边形 $ODBE$ 是正方形.

13. 如图, CD 是 $\odot O$ 的直径, 弦 AB 垂直 CD 于点 E , 连接 AC , BC , AD , BD , 则下列结论不一定的是 ()



A. $AE = BE$

B. $CE = OE$

C. $AC = BC$

D. $AD = BD$

【答案】 B

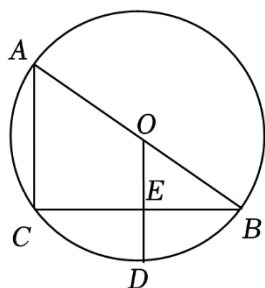
【分析】 $\because CD$ 是 $\odot O$ 的直径，弦 AB 垂直 CD 于点 E ，

$\therefore AE = BE$ ，弧 $AC =$ 弧 BC ，弧 $AD =$ 弧 BD ，

$\therefore AC = BC$ ， $AD = BD$ ，

而 $CE = OE$ 不一定成立.

14. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC 是弦， $OD \perp BC$ 于点 E ，交 BC 于点 D . 若 $BC = 8$ ， $ED = 2$ ，求 $\odot O$ 的半径.



【解答】 $\because OD \perp BC$ ，

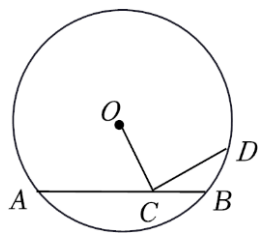
$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC = 4,$$

设 $\odot O$ 的半径为 R ，则 $OE = OD - DE = R - 2$ ，

在 $Rt\triangle OEB$ 中，由勾股定理得： $OE^2 + BE^2 = OB^2$ ，即 $(R - 2)^2 + 4^2 = R^2$ ，

解得 $R = 5$ ， $\therefore \odot O$ 的半径为 5.

15. 如图， AB 为 $\odot O$ 的弦，点 C 在 AB 上， $AC = 4$ ， $BC = 2$ ， $CD \perp OC$ 交 $\odot O$ 于点 D ，则 CD 的长为()



A. $\sqrt{2}$

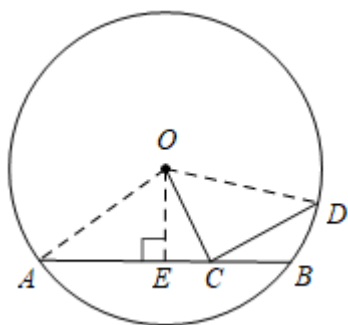
B. 3

C. $2\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】 C

【解答】



解：过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E ，连接 OA 、 OD ，

$$\because AC = 4, \quad BC = 2,$$

$$\therefore AB = 6,$$

$$\because OE \perp AB,$$

$$\therefore AE = BE = 3,$$

$$\therefore CE = 3 - 2 = 1,$$

设 $OE = x$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle OAE \text{ 中， } OA^2 = x^2 + 9,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OCE \text{ 中， } OC^2 = x^2 + 1,$$

$$\because CD \perp OC,$$

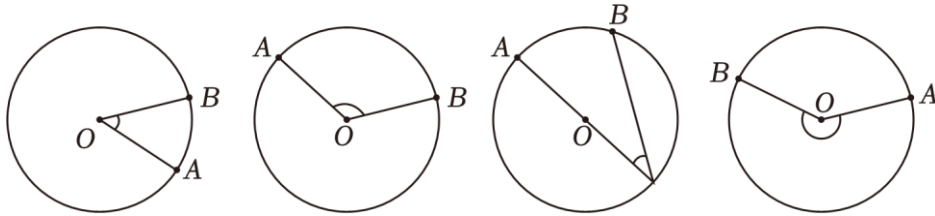
$$\therefore CD^2 = OD^2 - OC^2 = x^2 + 9 - (x^2 + 1) = 8,$$

$$\therefore CD = \pm 2\sqrt{2} \quad (\text{舍负}).$$

习题 L9-15：圆的有关性质（二）

参考答案与试题解析

1. 下列图形所标记的角中是圆心角的有()个.



A. 1

B. 2

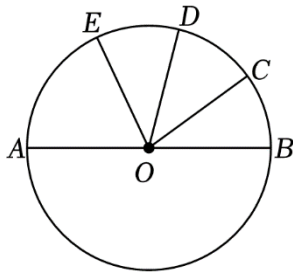
C. 3

D. 4

【答案】C

【分析】1、2、4 是圆心角.

2. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 是直径， $BC = CD = DE$ ， $\angle AOE = 60^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数为()



A. 35°

B. 40°

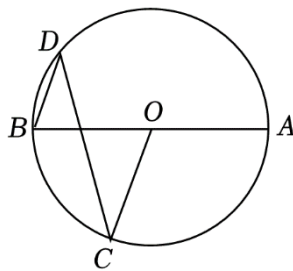
C. 45°

D. 60°

【答案】B

【分析】在同圆中等弧对的圆心角相等，得 $\angle BOC = \frac{1}{3} \angle BOE$ ，即可求解.

3. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\angle D = 35^\circ$ ，则 $\angle BOC =$ ()



A. 35°

B. 55°

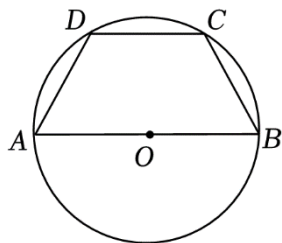
C. 70°

D. 75°

【答案】C

【分析】根据圆周角定理， $\because \angle D = 35^\circ$ ， $\therefore \angle BOC = 2\angle D = 70^\circ$ 。

4. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，若 $BC = CD = DA = 4\text{cm}$ ，则 $\odot O$ 的直径 AB 为()



A. 5cm

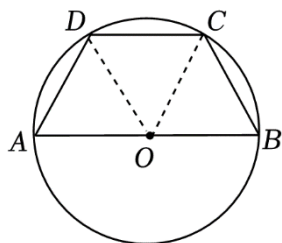
B. 4cm

C. 6cm

D. 8cm

【答案】D

【分析】



如图，连接 OD 、 OC ，

$\because BC = CD = DA = 4\text{cm}$ ，

$\therefore \angle AOD = \angle DOC = \angle BOC = 60^\circ$ 。

又 $OA = OD$ ，

$\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形，

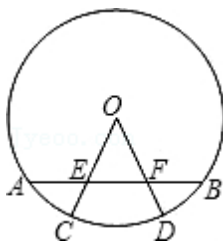
$\therefore OA = AD = 4\text{cm}$ ，

$\therefore \odot O$ 的直径 AB 为 8cm 。

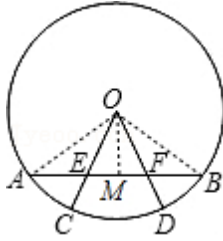
5. 如图，在 $\odot O$ 中，半径 OC ， OD 分别交弦 AB 于点 E ， F ，且 $OE = OF$ 。

(1) 求证： $AE = BF$ ；

(2) 求证： $AC = BD$ 。



【解答】证明：(1) 过 O 作 $OM \perp AB$ 于 M ，连接 OA 、 OB ，



$$\because OA = OB, \quad OE = OF,$$

$$\therefore AM = BM, \quad EM = FM,$$

$$\therefore AM - EM = BM - FM,$$

$$\therefore AE = BF;$$

$$(2) \because OM \perp AB, \quad OA = OB, \quad OE = OF,$$

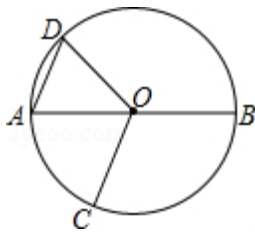
$$\therefore \angle AOM = \angle BOM, \quad \angle EOM = \angle FOM,$$

$$\therefore \angle AOM - \angle EOM = \angle BOM - \angle FOM,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD,$$

$$\therefore AC = BD.$$

6. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 若 $\angle AOC = 70^\circ$, 且 $AD \parallel OC$, 则 $\angle AOD$ 的度数为()



A. 70°

B. 60°

C. 50°

D. 40°

【分析】 $\because AD \parallel OC,$

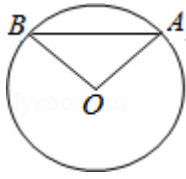
$$\therefore \angle DAO = \angle AOC = 70^\circ,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle D = \angle A = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ.$$

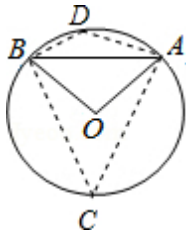
7. 如图, $\angle AOB = 110^\circ$, 弦 AB 所对的圆周角为()



- A. 55° B. 55° 或 70° C. 55° 或 125° D. 55° 或 110°

【答案】 C

【分析】



如图，在优弧 AB 上取点 C ，连接 BC ， AC ，在劣弧 AB 上取点 D ，连接 AD ， BD ，

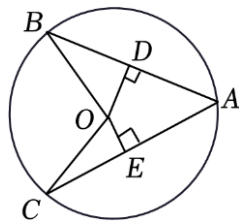
$$\because \angle AOB = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle ACB = 125^\circ.$$

$\therefore$ 弦 AB 所对的圆周角为： 55° 或 125° .

8. 如图， AB ， AC 是 $\odot O$ 的两条弦， $OD \perp AB$ 于点 D ， $OE \perp AC$ 于点 E ， 连接 OB ， OC . 若 $\angle BOC = 100^\circ$ ， 则 $\angle DOE$ 的度数为()



- A. 95° B. 100° C. 105° D. 130°

【答案】 D

【分析】 $\because OD \perp AB$ 于点 D ， $OE \perp AC$ 于点 E ，

$$\therefore \angle ADO = \angle AEO = 90^\circ,$$

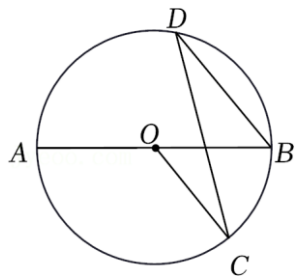
$$\because \angle BOC = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ADO + \angle AEO + \angle DOE = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle DOE = 360^\circ - \angle A - \angle ADO - \angle AEO = 130^\circ.$$

9. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\angle D = 32^\circ$, 则 $\angle AOC$ 等于()



A. 158°

B. 58°

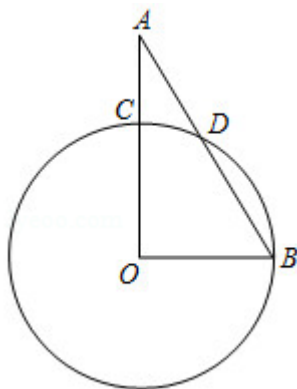
C. 64°

D. 116°

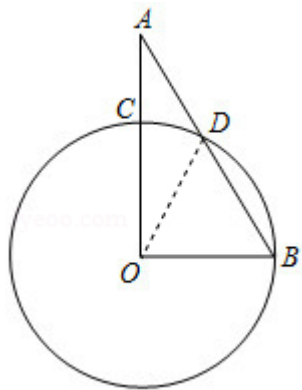
【答案】 D

【分析】 $\because \angle D = 32^\circ$, $\therefore \angle BOC = 2\angle D = 64^\circ$, $\therefore \angle AOC = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$.

10. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $\angle O = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, 以点 O 为圆心, OB 长为半径的 $\odot O$ 分别交 AO 、 AB 于点 C 、 D . 如果 $\odot O$ 的半径为 6cm , 那么弦 BD 的长为多少?



【分析】



连接 OD ,

∴ 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $\angle O = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

∴ $\angle B = 60^\circ$,

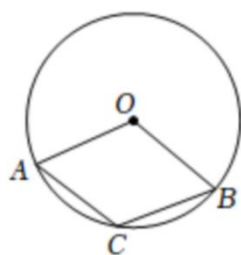
∴ $OD = OB$,

∴ $\triangle OBD$ 是等边三角形,

∴ $\odot O$ 的半径为 6cm ,

∴ $BD = OB = 6\text{cm}$.

11. 如图, A, B 是 $\odot O$ 上的点, $\angle AOB = 120^\circ$, C 是 AB 的中点, 若 $\odot O$ 的半径为 2, 则四边形 $ACBO$ 的面积为()



A. $\sqrt{3}$

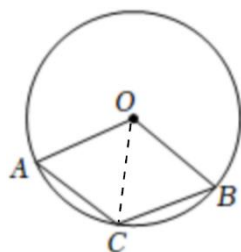
B. 2

C. 4

D. $2\sqrt{3}$

【答案】 D

【分析】



连 OC , 如图,

∵ C 是 AB 的中点, $\angle AOB = 120^\circ$,

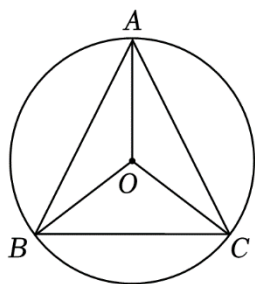
∴ $\angle AOC = \angle BOC = 60^\circ$,

又 ∵ $OA = OC = OB$,

∴ $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBC$ 都是等边三角形,

$$S_{\text{四边形}AOBC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

12. 如图, 在 $\odot O$ 中, $AB = AC = BC$, 则 $\angle BOC$ 的度数为()



- A. 100° B. 110° C. 120° D. 150°

【答案】 C

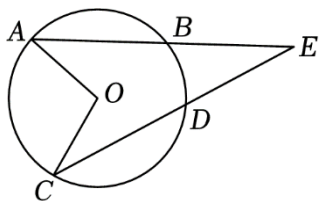
【分析】 $\because AB = AC = BC$,

$\therefore AB = AC = BC$,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 120^\circ$.

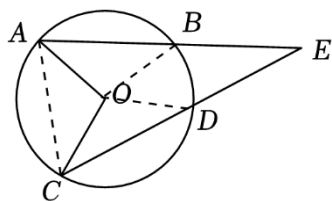
13. 如图, AB , CD 是 $\odot O$ 的弦, 延长 AB , CD 相交于点 E , 已知 $\angle E = 30^\circ$, $\angle AOC = 100^\circ$, 则 BD 所对的圆心角的度数是()



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 70°

【答案】 B

【分析】



如图, 连接 AC , OB , OD ,

$\because OA = OC$, $\angle AOC = 100^\circ$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 40^\circ$,

$\therefore \angle E = 30^\circ$,

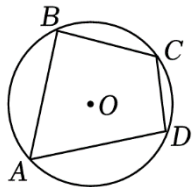
$\therefore \angle EAC + \angle ECA = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$,

$\therefore \angle OAB + \angle OCD = 150^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 70^\circ$,

$$\therefore \angle AOB + \angle COD = 180^\circ \times 2 - 70^\circ \times 2 = 220^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 360^\circ - 100^\circ - 220^\circ = 40^\circ.$$

14. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ， $AB = 5$ ， $CD = 3$ ，则 AD 的长为()



A. $4\sqrt{3} - 2$

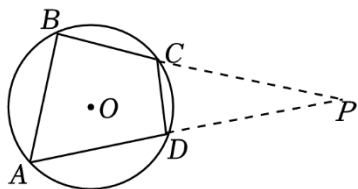
B. $8 - 2\sqrt{3}$

C. $10 - 3\sqrt{3}$

D. 6

【答案】 C

【分析】



分别延长 BC 和 AD ，延长线交于 P ，

$$\because \angle BCD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DCP = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，

$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDP = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle P = 90^\circ - \angle DCP = 30^\circ,$$

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

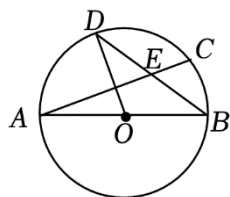
$$\therefore AP = 2AB = 2 \times 5 = 10,$$

$$\because \angle CDP = 90^\circ, \angle P = 30^\circ,$$

$$\therefore PD = \sqrt{3}CD = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = AP - PD = 10 - 3\sqrt{3}.$$

15. 如图，在半径为 9 的 $\odot O$ 中， AB 是直径， AC 是弦， D 是弧 AC 的中点， AC 与 BD 交于点 E ，若 E 是 BD 的中点，则 AC 的长是()



A. $12\sqrt{2}$

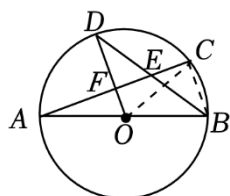
B. $8\sqrt{2}$

C. $12\sqrt{3}$

D. $8\sqrt{3}$

【答案】 A

【分析】



如图，连接 BC 、 OC ，设 OD 交 AC 于点 F ，

$\because D$ 是弧 AC 的中点，

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle COD,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore OF \perp AC, \quad AF = CF,$$

即点 F 是 AC 的中点，

又 $\because AB$ 是直径，

$$\therefore \text{点 } O \text{ 是 } AB \text{ 的中点，}$$

$$\therefore OF \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中位线，}$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2} BC,$$

$$\because AB \text{ 是直径，}$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

易证 $\triangle EFD \cong \triangle ECB$ (AAS)

$$\therefore BC = DF,$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2} DF,$$

又 $\because$ 半径为 9,

$$\therefore OF + DF = 9,$$

解得 $OF = 3$,

$$\therefore BC = DF = 2OF = 6,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{18^2 - 6^2} = 12\sqrt{2}.$$